

Resonante Steuerung nichtlinearer Schwinger

C. Wagner, W. Stelzel, A. Hübler*, E. Lüscher

Physikdepartment, Technische Universität, D-8046 Garching

W. Altmann

Messerschmitt-Bölkow-Blohm, ZTA, 8 München 80

Abstract: Der Resonanzbegriff wird verallgemeinert und auf nichtlineare Oszillatoren ausgedehnt. Die Theorie der resonanten Anregung und Steuerung nichtlinearer Schwinger wird vorgestellt. Es wird die resonante Anregung und Steuerung eines experimentellen Systems, sowie die verallgemeinerte Resonanzspektroskopie an einem experimentellen System vorgestellt. Es wird gezeigt, daß mit Hilfe dieser Methode nichtlinearen Potentialschwingern, beliebig viel Energie blindleistungsfrei zugeführt und entzogen werden kann.

1. Einleitung:

Schwinger mit ausgeprägter Nichtlinearität und chaotischen Lösungen liefern in den verschiedenen Gebieten der Physik gute mathematische Modelle /1/. Während in letzter Zeit vor allem Methoden zur Beschreibung chaotischer Lösungen derartiger Oszillatoren entwickelt wurden /2/ werden im folgenden Möglichkeiten der Anregung und Steuerung dieser Systeme untersucht.

Möchte man einen gedämpften harmonischen Oszillator zu einer bestimmten Schwingungsamplitude anregen oder ihm Energie entnehmen, so geschieht dies am günstigsten durch einen Antrieb in Resonanz. Dann schwingen die Geschwindigkeit des Oszillators $\dot{y}(t)$ ($\dot{y}=dy/dt$, $t=$ Zeit) und die Antriebskraft $F(t)$ in Phase: $F(t) \sim \dot{y}(t)$ /3/.

2. Theorie der resonanten Steuerung nichtlinearer Systeme

Das gesteuerte experimentelle System sei beschrieben durch $\dot{y}(t)=f(y,t) + F(t)$, wobei y ein n -dimensionaler Vektor, $f(y,t)$ ein n -dimensionales Flußvektorfeld und $F(t)$ die Antriebskraft (n -dimensionale Funktion der

Zeit) ist. Um das System zu einem durch die Solldifferentialgleichung $\dot{x}(t)=g(x,t)$ beschriebenen Verhalten zu zwingen wird die Antriebskraft $F(t)=-f(x,t) + g(x,t)$ (1) benötigt. Dann ist, wie man leicht durch einsetzen zeigt, $y_s=x$ eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems. Zur Untersuchung der Stabilität der Lösung betrachte man die Dynamik kleiner Anfangsunterschiede $e(t)=y(t)-x(t)$, die der Differentialgleichung $\dot{e}(t)=\left. \frac{\partial}{\partial y} g(y,t) \right|_{y=x} e(t)$ genügt.

3. Resonante Steuerung bei Potentialschwingern

Das experimentelle System sei nun vom Typ $-\ddot{y} - \lambda_1 \dot{y} + K(y) = 0$, wobei λ_1 die Reibungskonstante und $K(y)$ die nichtlineare Potentialkraft ist. Die Solldifferentialgleichung habe die Form $-\ddot{x} - \lambda_2 \dot{x} + K(x) = 0$. Transformiert man diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die übliche Weise in Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, berechnet $F(t)$ (nach (1)), und transformiert auf ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung zurück, so erhält man $-\ddot{y} - \lambda_1 \dot{y} + K(y) = F(t)$, wobei $F(t) = (\lambda_2 - \lambda_1) \dot{x}$. Für die spezielle Lösung $y_s=x$ ergibt sich $F(t)$ proportional zu \dot{y} , wodurch die oben erwähnte Definition von Resonanz erfüllt wird. Die dem System im Zeitraum T zugeführte Energie kann je nach Wahl der λ_1 variiert werden.

Die oben angesprochene Stabilitätsanalyse führt zu der Differentialgleichung eines gedämpften, parametrisch angetriebenen Oszillators in e , der bei ausreichend großem λ_1 asymptotisch stabile Lösungen liefert.

4. Experiment

Ein mit einer exzentrischen Zusatzmasse versehenes Pohlsches Rad, daß durch die Differentialgleichung $\Theta \ddot{y} + \alpha \dot{y} + c_1 y - c_2 \sin(y) = 0$ (mit $\Theta = 1.65 \text{ gm}^2 = \text{Trägheitsmoment}$, $\alpha = 1.7 \text{ gm}^2/\text{s} = \text{Reibungskonstante}$, $c_1 = 1.6 \text{ gm}^2/\text{s}^2 = \text{Federkonstante}$, $c_2 = 18.6 \text{ gm}^2/\text{s}^2 = \text{exzentrisches Moment}$) beschrieben wird, wird durch einen rechnergesteuerten Motor angetrieben. Die Antriebskraft des experimentellen Schwingers wurde mit (1) berechnet. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen, daß das System angetrieben, gebremst und gesteuert werden kann.

Abb. 1: Der Oszillator wird bis zur 51. Schwingung mit $\lambda_2/\lambda_1 = 0.17$ resonant angetrieben. Danach wird der Oszillator resonant mit $\lambda_2/\lambda_1 = -4$ gebremst.

(*) Sollfunktion

(+) Experiment

(o) Ausschwingen von y ohne Störung.

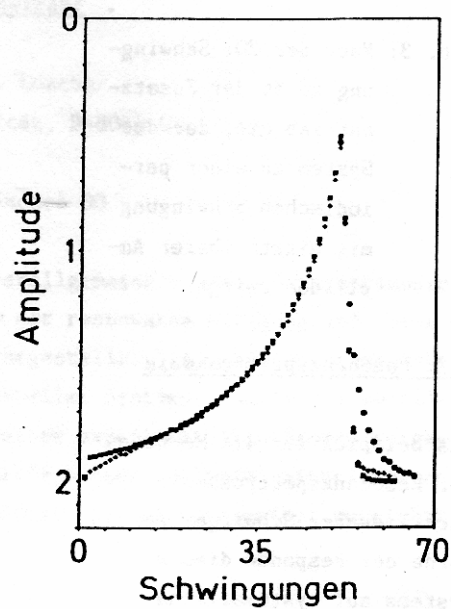
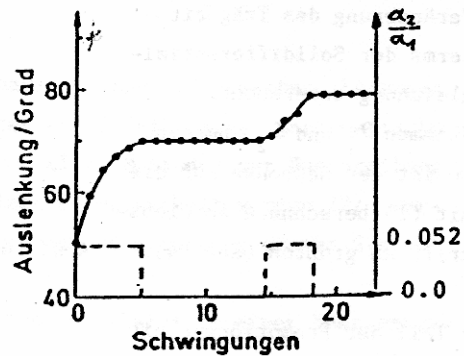


Abb. 2: Steuerung des Schwingers
Das Verhältnis α_2/α_1 wird entlang der gestrichelten Linie verändert. Sollfunktion und Experiment stimmen innerhalb der Strichbreite überein.



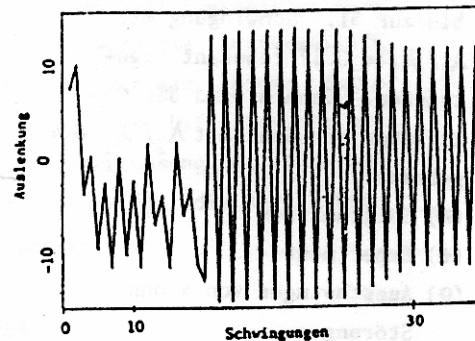
4.1. Steuerung eines chaotischen Systems

Wird das Pohlsche Rad mit exzentrischer Zusatzmasse sinusförmig angetrieben, so zeigt es i.a. chaotisches Verhalten.

$$\Theta_1 \ddot{y} + \alpha \dot{y} + cy - mrg \sin(y) + b \sin(\omega t) = 0$$

Ein derartiges chaotisches System kann mit einem nach der vorgestellten Theorie berechneten Zusatzantrieb eingefangen und gesteuert werden, wobei $\Theta_2 \ddot{x} + c_2 x = 0$ eine mögliche Sollfunktion ist.

Abb. 3: Nach der 20. Schwingung setzt der Zusatzantrieb ein, der das System zu einer periodischen Schwingung mit einstellbarer Amplitude zwingt.



4.2. Resonanzspektroskopie

Als Beispiel für die Methode der Resonanzspektroskopie nichtlinearer Schwinger /4/ wurde der Response dieses Systems auf systematische Veränderung des Trägheitsterms der Solldifferentialgleichung untersucht. Stimmen Θ_1 und Θ_2 überein, so ist der Response auf die mit (1) berechnete Antriebskraft am größten (Abb. 4).

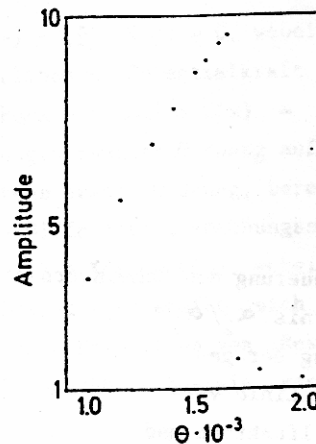


Abb. 4: Resonanzspektroskopie (Variation von Θ)

* Teil der Promotionsarbeit

Wir danken Herrn O. Wohofsky für die vielfältige Unterstützung.

- /1/ H.L. Swinney, Observation of Order and Chaos in Nonlinear Systems, Physica 7d, 3(1983)
- /2/ P. Grassberger, I. Procaccia, Dimension and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach, Physica 13d, 34, 1984
- /3/ T.F. Hueter, R.H. Bolt, Sonics, 5. Auflage, John Wiley and Sons, INC, New York, London, Sydney, Seite 20
- /4/ A. Hübler, G. Reiser, E. Lüscher, Über die Steuerung nichtlinearer Schwinger, HPA 60, 226 (1986)