Helv. Physica Acta 1988
Vol. 61, pages 224-227

Über die Eindeutigkeit der Lösungen der Eulerschen Gleichungen in der klassischen Mechanik

W. Stelzel, T. Kautzky, A. Hübler*, E. Lüscher
Physikdepartment, Technische Universität München, D-8046 Garching

Abstract: Die Bewegungsgleichung von Schwingern aus der klassischen Mechanik ist in der Regel eine nichtlineare, nichtexplizite, gewöhnliche Differentialgleichung die sowohl eindeutige (Typ A) als auch mehrdeutige (Typ B) Lösungen besitzen kann. Es wird mathematisch und experimentell belegt, daß Systeme vom Typ A und Typ B prinzipiell unterschiedliche statistische Eigenschaften besitzen.

1. Einleitung

Es gilt als Tatsache, daß sich bei Systemen aus der klassischen Mechanik /1/ sowohl das Verhalten in der Zukunft als auch in der Vergangenheit eindeutig bestimmen läßt, falls die Anfangsbedingung nur hinreichend genau bekannt ist. In der Chaostheorie /2/ wurde gezeigt, daß bei fast allen physikalisch relevanten Systemen /3/,selbst bei den besten physikalisch realisierbaren Versuchsbedingungen nur eine Vorhersage über kurze Zeitskalen möglich ist. Es konnte gezeigt werden, daß zwei Systeme, die sich nur infinitesimal in den Anfangsbedingungen unterscheiden, eine qualitativ unterschiedliche Dynamik besitzen können /2/.
Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß auch bei exakt bestimmten Anfangsbedingungen und Parametern die Dynamik eines klassischen Systems nicht in jedem Fall vorhersagbar ist.

2. Eindeutigkeit der Lösungen der Bewegungsgleichungen

Die Lösung eines expliziten Differentialgleichungssystems erster Ordnung ist eindeutig, wenn sie einer Lipschitz-Bedingung genügt /4/ Die Eulergleichungen der klassischen Mechanik sind weder explizit noch genügen sie in der Regel global einer Lipschitz-Bedingung, so daß die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung für jedes System einzeln untersucht werden muß. Betrachtet man bespielsweise eine überdämpfte Bewegung in Potentialen $V(x)=-(c/n)\ x\ |x|^{n-1}$ mit $1<n<2$: $\dot{x} = c|x|^{n-1}$ (1) so zeigt es sich, daß physikalisch sinnvolle Anfangswerte angegeben werden können, für die keine eindeutige Lösung existiert /4/.

Gleichung (1) kann für $1<n$ analytisch gelöst werden.

Der entscheidende Effekt ist, daß für $1<n<2$ die Lösungen ineinander einmünden und damit für Anfangsbedingungen $x_0<0$ keine eindeutige Lösung angegeben werden kann. Ein mechanisches System, welches durch die Anfangsbedingungen x_a, t_a und die Gleichung (1) gut beschrieben werden kann, zeigt auch unter dem Einfluß von (experimentellem) Rauschen unterschiedliches Verhalten, je nachdem ob die zugrundeliegende Lösung eindeutig ist oder nicht. Um dies zu zeigen wurden numerische Simulationen mit der Gleichung $\dot{x} = c|x|^{n-1}+F(t)$ (2) mit $F(t)=\sum_i \delta(t-i\Delta t)r_i$, wobei die r_i gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $[-D,D]$ sind, durchgeführt. Die Simulationen sind nach Haken /5/ äquivalent zur Beschreibung mit der Fokker-Planck-Gleichung dieses Systems.

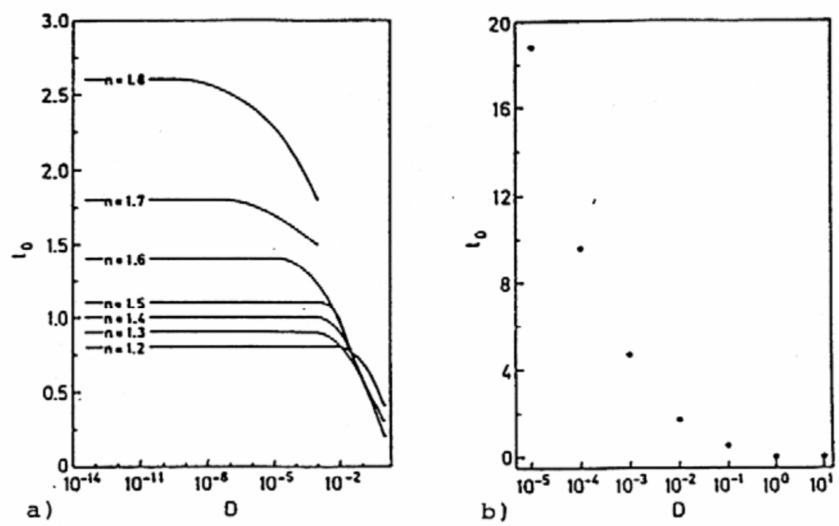

Abb.1a) Zeitpunkt t_0, zu dem ein Teilchen im System B mit Anfangsbedingung $x_0 = -0.78$ den Nullpunkt im Mittel erreicht, für verschiedene Rauschamplituden D. (b) Zeitpunkt t_0 zu dem ein Teilchen im System A mit n=2,3 und Anfangsbedingung $x_0 = -0.78$ im Mittel den Nullpunkt erreicht, für verschiedene Rauschamplituden D. Gemittelt wurde über 10000 Einzelversuche. ($\Delta t = 10^{-3}$).

Startet man das System mit der Anfangsbedingung (x_0<0,t=0), so wird die Zeit t_0, bei der es den Ursprung erreicht (d.h. der Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Teilchens, ausgesetzt an der Stelle x_0, den Ort x=0 erreicht) bei einem System vom Typ B (1<n<2) bei genügend kleiner Rauschamplitude r im wesentlichen bestimmt durch jenen Zeitpunkt, an dem die Trajekorie des entsprechenden unverrauschten Systems in die konstante Lösung einmündet (Abb.1). Bei Systemen vom Typ A ($n \geq 2$) divergiert die Zeit t_0 mit kleiner werdendem Rauschanteil.

3. Experimentelle Realisierung

In einer Rinne aus Aluminium, gefüllt mit temperiertem Rizinusöl, rollt eine Stahlkugel (Masse=4g) unter dem Einfluß der Schwerkraft. Die Neigung der Rinne ist so beschaffen, daß folgender Zusammenhang zwischen dem Ort x und dem Schwerepotential der Kugel besteht:

$$V(x) = m \cdot g \cdot h(x), \text{ mit } h(x) = 0.1 \times |x|^{.5} \text{ mm} \pm 0.001\text{mm} \quad (x \text{ in mm}) \qquad (3)$$

Die Kugel bewegt sich aufgrund des Schwerepotentials zunächst relativ schnell zum Nullpunkt des Potentials, wobei sie in der Nähe des Nullpunkts stark abgebremst wird. Die Kugel bleibt am Nullpunkt liegen und rollt nach einer gewissen Verweildauer (1 bis 2,5 Sekunden) weiter (Abb.2).

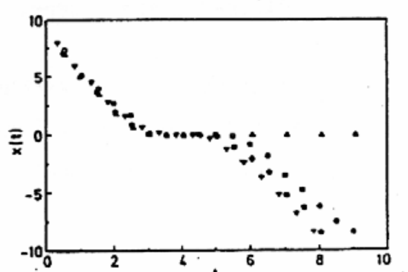

Abb.2 Der Ort der Kugel als Funktion der Zeit. Dargestellt sind vier Experimente mit gleichen Anfangsbedingungen.

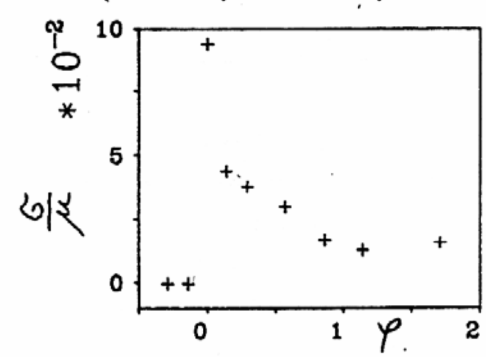

Abb.3 Das Verhältnis der Standardabweichung (σ) zur mittleren Laufzeit (μ) für verschiedene Neigungswinkel φ des Experiments.

4. Zusammenfassung:

Auch in Gegenwart von experimentellem Rauschen verhalten sich deterministische (Typ A) und nichtdeterministische (Typ B) klassische Systeme qualitativ unterschiedlich. Natürlich sind die Trägheitskräfte bei einem derartigen Experiment nie exakt Null und auch die Form des Potentials kann experimentell nur innerhalb endlicher Fehlergrenzen garantiert werden. Dennoch bleibt die Aussage, wenn durch den experimentellen Aufbau Trägheitskräfte, experimentelle Ungenauigkeiten, thermische Fluktuationen und Quantenfluktuationen systematisch reduziert werden, die Dynamik bei Systemen vom Typ A mit Mitteln der klassischen Mechanik allein prinzipiell nicht über jenen Zeitpunkt t_g hinaus vorhergesagt werden können, an dem das Teilchen die Stelle $x=0$ erreicht. Durch Einschränkungen der in der klassischen Mechanik zugelassenen Potentialformen , beispielweise auf analytische Potentiale, könnte man zumindest formal die Eindeutigkeit der Trajektorien in der klassischen Mechanik retten. Aber gerade nichtanalytische Potentiale, wie das Potential harter Kugeln /6/ oder das Kepler-Potential sind in der klassischen Mechanik sehr erfolgreich.

* Teil der Promotionsarbeit

Wir danken Herrn O. Wohofsky für die freundliche Unterstützung.

/1/ G. Süßmann, Zur Problematik der Irreversibilität angesichts der Umkehrinvarianz, Grundlagenprobleme der modernen Physik, Festschrift P. Mittelstaedt zu 50. Geb., BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1981

/2/ A.J. Lichtenberg, M.A. Liebermann, Regular and Stochastic Motion, Springer, New York 1982

/3/ G. Eilenberger in Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, Ed.G. Eilenberger, H. Müller-Krumbhaar (KFA-Jülich, D-Jülich, 1985)

/4/ Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter, Berlin 1983

/5/ H. Haken, Synergetics, an Introduction, Springer, Berlin 1983

/6/ K. Binder,Ed. Domb, Phase Transitions and Critical Phenomena, Ac. Press 5b, 1976