Helv. Physica Acta 1988
Vol. 61, pages 220-223

46

PHYSIQUE THÉORIQUE

RESPONSE SCHWACH NICHTLINEARER POTENTIALSCHWINGER BEI KLEINEN SINUSFÖRMIGEN STÖRUNGEN

R.Rothhardt, A.Hübler*, E.Lüscher, Physik-Dept.
Technische Universität München, D-8046 Garching

Abstract: Es wird gezeigt, daß schwach nichtlineare Potentialschwinger charakteristisch auf kleine sinusförmige Störungen reagieren. In Beispielen wird illustriert, daß der Response eines schwach nichtlinearen Schwingers zwar komplex, aber klein im Gegensatz zu dem eines harmonischen Schwingers ist.

1. Amplitudenbegrenzung durch Reibung

Der einfachste Schwinger der klassischen Mechanik ist das harmonische Pendel. Aus dem Gleichgewicht von Trägheitskraft F_t und Potentialkraft $F_p = - dV/dx$ ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$- m\, d^2x/dt^2 - cx = 0 \qquad (1)$$

Nimmt man Reibungskräfte und einen sinusförmigen Antrieb hinzu, so erweitert sich die Bewegungsgleichung auf :

$$d^2x/dt^2 + g\, dx/dt + w_k^2\, x = f \cos wt\,; \qquad w_k = \sqrt{\frac{c}{m}}\,; \qquad (2)$$

Die Dynamik konvergiert gegen eine sinusförmige Schwingung, dessen Frequenz und Amplitude vom Antrieb abhängen. Löst man die Bewegungsgleichung unter Beibehaltung der Anfangsbedingungen x_0 und v_0 als Parameter, so erhält man

$$x(t) = a_{1,00}(t,w_k) + a_{1,01}(t,w_k)\, x_0 + a_{1,10}(t,w_k)\, v_0 \qquad (3)$$
$$v(t) = a_{2,00}(t,w_k) + a_{2,01}(t,w_k)\, x_0 + a_{2,10}(t,w_k)\, v_0$$

Betrachtet man das System zu Zeiten einer vollen Antriebsperiode, so reduziert es sich auf eine Iterationsfunktion :

$$x_{i+1} = a_{1,00}(T,w_k) + a_{1,01}(T,w_k)\, x_i + a_{1,10}(T,w_k)\, v_i \qquad (4)$$
$$v_{i+1} = a_{2,00}(T,w_k) + a_{2,01}(T,w_k)\, x_i + a_{2,10}(T,w_k)\, v_i$$

Die Iterationsfunktion (4) besitzt genau einen stabilen Fixpunkt x_s, v_s, dessen Einzugsbereich alle Anfangsbedingungen umfaßt. Beim ungedämpften System divergiert dieser Fixpunkt für $w \to w_k$, das System ist resonant. Die Energieaufnahme wächst nicht in allen Fällen kontinuierlich, denn für negative

Phasenlage zwischen Antrieb und Amplitude gibt der Schwinger zunächst Energie ab.

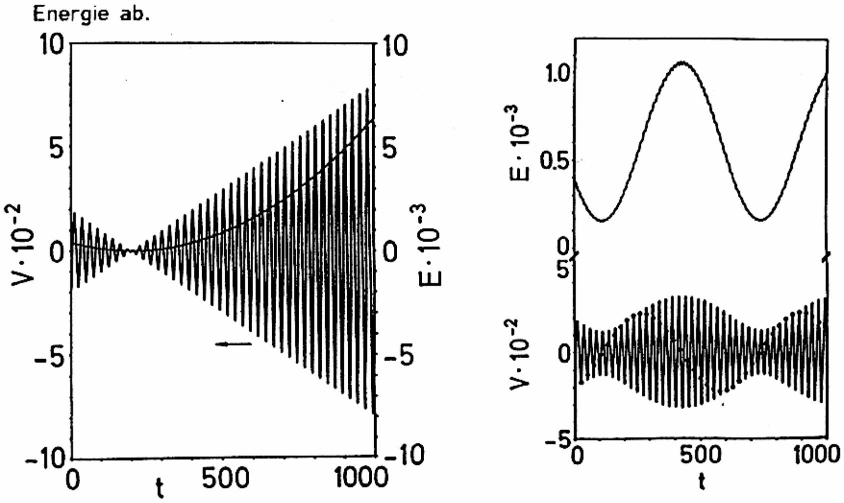

Abb 1a Energie und Geschwindigkeit des ungedämpften linearen resonant angetriebenen Oszillators. Zur Zeit t=0 ist die Phasenlage negativ.

Abb 1b Gleicher Oszillator, außerhalb der Resonanz angeregt

Wird ein ungedämpfter linearer Schwinger durch eine kleine sinusförmige Kraft der Frequenz $w \neq w_k$ gestört, so stellt man fest, daß das System im wesentlichen mit konstanter Frequenz und Phase schwingt. Aufgrund wechselnder Phasenbeziehung zwischen Antrieb und Oszillator kommt es zu Amplitudenmodulationen. Ist das System leicht gedämpft, so tritt bei kleinen Amplituden ähnliches Einschwingverhalten auf. Bei großen Amplituden wird die Energieaufnahme durch Reibung begrenzt.

2. Amplitudenbegrenzung durch nichtlineare Potentialkräfte bei konservativen Systemen

Kleine Schwingungen in nichtlinearen Potentialen, die sich um ihr Minimum in eine Potenzreihe $V(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ entwickeln lassen, kann man mit Hilfe der Störungsrechnung (/1/) linear approximieren. Während beim linearen Schwinger die Frequenz unabhängig von der Amplitude ist, können bei nichtlinearer Federkraft in ungedämpften Systemen zwar periodische Schwingungen auftreten (Theorem von Poincare-Benedixon/2/), die Frequenz steht allerdings in Beziehung zur Energie. (/1/) Sei nun in der Potentialentwicklung $a_2 \gg |a_i|$, $i > 2$; so läßt sich bei einer Reihe von Systemen zeigen, daß jede Einzelschwingung gut linear approximiert wird, wobei sich aber die Schwingungsdauer, je nach Energieinhalt des Systems, verschiebt. Wird ein solcher Schwinger mit einer kleinen sinusförmigen Kraft angetrieben, so können Phasenverschiebung und Energieaufnahme abgeschätzt werden, indem man hierfür einen verstimmbaren linearen Oszillator heranzieht. Man verwendet Gleichung (4), wobei Eigenfrequenz und Schwerpunkt der Schwingung von der Energie und diese von Ort und Geschwindigkeit abhängt.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= a_{1,00}(T,w_k(x_i,v_i)) + a_{1,01}(T,w_k(x_i,v_i))(x_i - s(x_i,v_i)) + \\ &\quad + a_{1,10}(T,w_k(x_i,v_i))\, v_i + s(x,v) \\ v_{i+1} &= a_{2,00}(T,w_k(x_i,v_i)) + a_{2,01}(T,w_k(x_i,v_i))(x_i - s(x_i,v_i)) + \\ &\quad + a_{2,10}(T,w_k(x_i,v_i)) \end{aligned} \tag{5}$$

Die Qualität der Approximation kann mit dem Mittelungstheorem (/3/) abgeschätzt werden, indem man die Größe der Abweichung der Näherungslösung von der exakten Lösung abschätzt.

$$\begin{aligned} & - d^2y/dt^2 - g\, dy/dt - \partial V/\partial y - f \cos wt = 0 \\ & - d^2x/dt^2 - g\, dx/dt - w_k^2\, x - f \cos wt = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\Delta = y - x; \quad d = [\, w^2\Delta - g\, d\Delta/dt - \frac{\delta V}{\delta y}(\Delta + x) + w_k^2 x\,]/w\,;$$

Die Abweichung der exakten von der Näherungslösung ist von der Ordnung $O(\varepsilon)$, wenn es ein ε gibt mit (i) $|d| < \varepsilon$; (ii) $\int_0^T d \sin wt\, dt < \varepsilon$; $\int_0^T d \cos wt < \varepsilon$; (iii) $\varepsilon < w/2\pi$.

Als Beispiel wurde die Dynamik eines Kepler-Oszillators

$$- d^2y/dt^2 - g\, dy/dt + 1/2y^2 - 1/y^3 - f \cos wt = 0 \tag{7}$$

untersucht. Hier ist die Approximation günstig, da die Schwingung bei kleiner Dämpfung und kleiner Antriebskraft oberwellenarm ist, und sich die charakteristische Schwingungsdauer des Systems während einer Schwingung nicht wesentlich ändert. Man erkennt daß sich die Dynamik gut durch die Iterationsfunktion beschreiben läßt, wenn man die Nichtlinearitäten über w_k (E) und s(E) mitnimmt. (Abb 2a)

Daraus ergeben sich Universalitäten in zweierlei Hinsicht :

(i) Alle schwach nichtlinearen Potentialschwinger besitzen eine Dynamik, die sich durch eine Iterationsfunktion (5) beschreiben läßt.

(ii) Alle schwach nichtlinearen Potentialschwinger bei denen w_k (E) und s(E) übereinstimmen, besitzen den gleichen Response.

Untersuchungen an gekoppelten Oszillatoren deuten an, daß es einen ähnlichen Zusammenhang auch bei gekoppelten Systemen geben könnte (/4/).

3. Gedämpfte nichtlineare Schwinger mit sinusförmigem Antrieb

Bei sehr großer Dämpfung bleibt die Schwingungsamplitude klein, das System kann in guter Näherung als harmonisch betrachtet werden. Die nichtlineare Funktion besitzt einen Fixpunkt in der Nähe des Fixpunktes des linearen Systems.

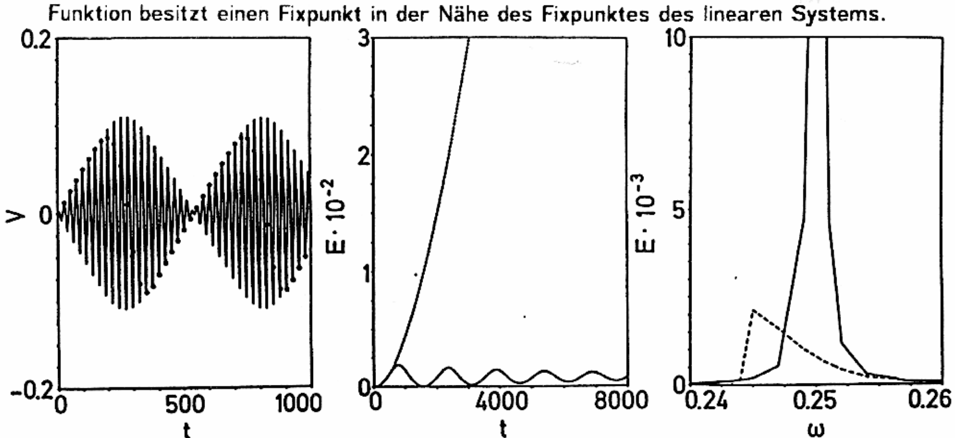

Abb 2a. Dynamik des Kepleroszillators numerisch (—) Iteration (o)
Abb 2b. Energie des harmonischen (– –) und des Kepleroszil. in Resonanz (—)
Abb 2c. Resonanzkurve des harmonischen (—) und des Kepleroszillators (– –)

Ist die Dämpfung sehr klein, so stabilisiert sich die Schwingung des harmonischen Oszillators bei jener Amplitude, bei der die Reibungs- und Antriebskräfte in etwa gleich groß sind, während im nichtlinearen Fall (z.B System (7)) die Amplitude durch Verstimmung des Oszillators auf einem Niveau stabilisiert wird, bei dem die Reibungskraft im Verhältnis zur Antriebskraft unbedeutend ist.

Wir danken Herrn Dr. Wohofsky für seine Unterstützung.

4. Literatur

/1/ L.D. Landau, E.M Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik : Mechanik, Akademie-Verlag Berlin 1979, p. 94ff

/2/ H.Haken, Synergetics, An Introduction, Springer Berlin 1983, p. 119

/3/ J.Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer New York 1983, chapt .4

/4/ T. Eisenhammer Naturforschung 74, 336 (1987)

*) Diese Arbeit ist Teil der Promotionsarbeit von A. Hübler