

DAS PRINZIP EXTREMALE ANKOPPLUNG

F. Dinkelacker, A. Hübler*, E. Lüscher
Physik-Department, Technische Universität München, D-8046 Garching

Abstract:

In diesem Paper wird ein Variationsprinzip für Systeme mit Reibung und zeitabhängiger Störung vorgestellt. Es wird gezeigt, daß im stationären Zustand die Ankopplung an die Störung extremal ist.

1. Das Prinzip der extremalen Ankopplung

Ein Zustand wird stationär genannt, wenn die Bewegungsgleichungen in nichttriviale Summanden zerfallen, die alle verschwinden. Wir unterscheiden zwischen Kopplungsvariablen q' , die ein Maß für die Wechselwirkung sind, und inneren Variablen q . Wir betrachten Systeme der Form:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_{D_j}(\dot{q}'_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i(q_i, \dot{q}_i, \dots, q'_j, \dot{q}'_j, \dots, t) \\ -\frac{\partial}{\partial \dot{q}'_j} V(q_i, \dot{q}_i, \dots, q'_j, t) \end{bmatrix} = 0 \quad (I)$$

$i=1, \dots, m$; $j=m+1, \dots, m+n$,

F_i Kräfte, F_{D_j} Reibungskräfte, V Störpotential (unabhängig von \dot{q}'_j).

Satz

Im stationären Zustand des Systems (I) sind die Kopplungsvariablen q'_j so, daß die Ankopplung extremal ist. Die Ankopplung ist die Wirkung des Störpotentials V : $S_A = \int -V dt$.

Beweis: (I) stationär: $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}'_j} = 0 \Leftrightarrow S_A = \int -V dt = \text{extremal}$ bezüglich der Variation von q'_j (Hamiltonsches Variationsprinzip, Goldstein 1959).

Im stationären Zustand können die Kopplungsvariablen q'_j aus $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}'_j} = 0$ bestimmt werden.

2. Beispiel 1 für das Prinzip der extremalen Ankopplung

Wir betrachten folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \dot{q}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{-\ddot{q} - \lambda_1 \dot{q} + \alpha_1 q + \alpha_2 q^3}^{F_A} - \frac{\partial V}{\partial q} \\ -\frac{\partial V}{\partial q'} \end{bmatrix} = 0$$

Diese Gleichungen beschreiben die Dynamik einer Kugel, die mit einer Feder an eine eindimensionale schwingende Platte gekoppelt ist. $q'(t)$ ist ein Maß für die Ankopplung. $q(t)$ ist eine innere Variable (Abb. 1).

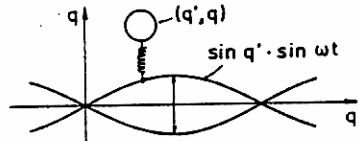


Abb.1: Dynamik einer Kugel auf einer schwingender Platte

Das Beispiel erinnert an die Chladnischen Klangfiguren, bei denen Sand zu den Knotenlinien einer schwingenden Platte geschleudert wird (Chladni 1802). V ist die potentielle Energie der Feder:

$$V = c/2 (q - \sin q' \sin \omega t)^2$$

Die Kopplungsvariable q' verändert sich überdämpft, also $\ddot{q}' \approx 0$.

Im stationären Zustand sei $q' = \text{const.}$, also $\dot{q}' = 0$. Für q' folgt dann :

$$\frac{\partial V}{\partial q'} = -c(q - \sin q' \sin \omega t) \cos q' \sin \omega t = 0$$

Fall 1 : () = 0 $\Leftrightarrow q' = 0 (+k\pi)$, $q = 0$ $\stackrel{\Delta}{=} \text{Knoten}$

Fall 2 : $\cos q' = 0 \Leftrightarrow q' = \frac{\pi}{2} (+k\pi)$ $\stackrel{\Delta}{=} \text{Schwingsungsbauch}$

In beiden Fällen ist die Ankopplung $S_A = \int -c/2 \cdot (q - \sin q' \sin \omega t)^2 dt$ extremal. Die Ankopplung S_A ist proportional zum Zeitmittelwert von $V(t)$. Die Kraft F_A ist für das Prinzip der extremalen Ankopplung nicht wichtig. Hier beschreibt sie z.B. einen gedämpften Duffing Oscillator. Für $\sin q' = \frac{\pi}{2}$ können stationäre chaotische Schwingungen mit extremaler Ankopplung auftreten.

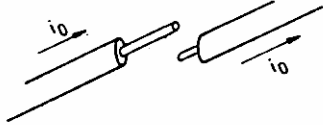
3. Beispiel 2 : Eine gerissene Telefonleitung

Abb.2: Gerissene Telefonleitung

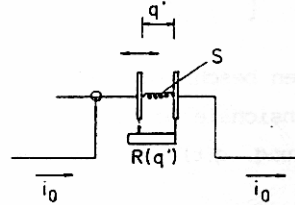


Abb.3: Plattenkondensator

Als ein Modell für eine gerissene Telefonleitung (Abb. 2) betrachten wir einen Plattenkondensator mit variablem Abstand q' (Abb. 3). Die Ladung $Q(q') = I_0 R(q') C(q')$ bewirkt eine anziehende Kraft. Eine Feder S (isolierendes Material) entspricht einigen Schmutzteilchen zwischen den Kabelenden der Telefonleitung und bewirkt eine abstoßende Kraft. Der Strom I_0 ist aufgeprägt. Er sei zeitabhängig, aber die Relaxationszeit von q' sei viel kürzer als die Änderung von I_0 . Die überdämpfte Bewegungsgleichung für q' ist

$$-\lambda \dot{q}' - \frac{\partial V}{\partial q'} = 0$$

Im stationären Zustand verschwindet $\frac{\partial V}{\partial q'}$.

Mit dem Störpotential (Energie von Kondensator und Feder)

$$V = Q^2/2C + c/2 (q' - q_0)^2 = I_0^2 k \cdot q' + c/2 (q' - q_0)^2$$

($R \sim q'$, $C \sim 1/q'$, $k > 0$ const.) folgt für q' :

$$q' = q_0 - I_0^2 k/c$$

Dieser stationäre Abstand ist auch stabil ($\partial^2 V / \partial q'^2 > 0$). Die Ankopplung $S_\lambda = \int -V dt$ ist ein Maß für die durch den Stromfluß gespeicherte potentielle Energie. Ihr Betrag ist minimal. Das gerissene Telefonkabel hat sozusagen die Neigung, seine "Ankopplung an das Telefongespäch zu verringern", so daß die Telefonbenutzer "maximal aneinander gekoppelt sind".

Ohne Feder würden die Kondensatorplatten aneinander stoßen. In diesem Fall wäre sowohl der Betrag der Ankopplung minimal als auch die Dissipation.

4. Beispiel 3 : Metallkugelstrukturen im E-Feld

Ein nichttriviales Beispiel, bei dem ebenfalls Ankopplung und Dissipation extremal sind, ist das folgende Experiment (Georgii et al 1987, Schmöller et al 1987, Merté et al 1988), (Abb.4).

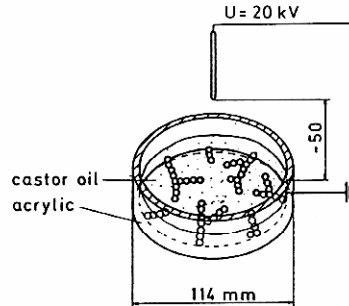


Abb.4: Strukturbildung von Metallteilchen im E - Feld (aus Merté et al 1988)

Kleine bewegliche Metallkugeln sind innerhalb einer Ringelektrode in Rizinusöl verteilt. Von oben werden kontinuierlich elektrische Ladungen aufgesprüht. Das elektrische Feld zwischen den Kugeln verursacht ein Störpotential $V = \int \epsilon_0 \frac{1}{2} E^2 d\vec{x}$. Die Kugeln mit den Koordinaten x_i bewegen sich nach $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$ bis V minimal ist. Die Ankopplung $S_A = \int -V dt$ ist extremal. In diesem Fall ist auch die Dissipation $P = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\vec{x} \sim V$ (ϵ_0 spezifischer Widerstand des Öls) minimal. Wenn die experimentellen Bedingungen geeignet gewählt sind, lagern sich die Metallkugeln in dendritischen Strukturen an.

* Teil der Doktorarbeit

Literatur

- E. Chladni, in "Die Akustik", Leipzig (1802)
- R. Georgii, A. Hübler, E. Lüscher, Extremaleigenschaften dendritischer Strukturen, HPA 60, S. 211 (1987)
- H. Goldstein, Classical Mechanics, 3. ed., chap. 2, Reading, Mass., (1959)
- B. Merté, P. Gaitzsch, M. Fritzenwanger, W. Kropf, A. Hübler, E. Lüscher, Stable Stationary Dendritic Patterns with Minimal Dissipation, HPA 61 erscheint 1988
- A. Schmöller, W. Kropf, A. Rosenberger, A. Hübler, E. Lüscher, Strukturbildung von Metallteilchen in elektrischen und magnetischen Feldern, HPA 60, S. 215 (1987)