

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG EINES SINUSFÖRMIG GESTÖRTEN VAN DER POL OSZILLATORS

M. Athelougou, T. Kautzky, A. Hübler\*, E. Lüscher  
 Physikdepartment, Technische Universität München, D-8046 Garching

Abstract: Ein klassischer van der Pol Oszillator, dessen Nichtlinearität im wesentlichen durch die Nichtlinearität der Röhrenkennlinie bestimmt ist, wird ausserhalb des Modelocking-Bereiches experimentell untersucht. Aus den experimentellen Daten werden Poincaré-Abbildungen ermittelt und Flussvektorfelder rekonstruiert. Aus dem Flussvektorfeld werden durch einen Fit die Parameter der zugrundeliegenden Differentialgleichung abgeschätzt.

1. Experiment

Der van der Pol Oszillator ist das klassische Modellsystem für Modelocking und Phaselocking /1/. Seine historische experimentelle Realisierung ist die Meißnerschaltung /2/ (Abb.1).

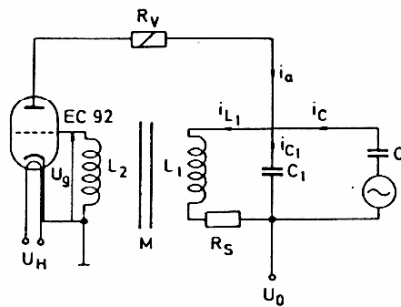


Abb.1: Schaltbild des verwendeten Oszillators.

- $C = .047 \cdot 10^{-6} \text{ F}$
- $C_1 = 4.7 \cdot 10^{-6} \text{ F}$
- $U_0 = 243 \text{ V}$
- $M = .0396 \text{ H}$
- $L_1 = .295 \text{ H}$
- $L_2 = .002 \text{ H}$
- $R_V = 10 \text{ kOhm}$
- $R_S = 17.95 \text{ Ohm}$

Die Kennlinie der Röhre wird durch  $I_a = K_0 + K_1 U_g + K_2 U_g^2 + K_3 U_g^3 + O(U_g^4)$  beschrieben. Die Koeffizienten  $K_i$  ergeben sich durch Fit zu (SI Einheiten):  $K_0 = 9.149 \cdot 10^{-3}$ ,  $K_1 = 2.149 \cdot 10^{-3}$ ,  $K_2 = .884 \cdot 10^{-3}$ ,  $K_3 = -.002 \cdot 10^{-3}$ . Aus dieser Schaltung folgt mit den Maschen- und Knotengleichungen und den Transformatorgleichungen, deren jeweils kleinerer Term ver-

$$CY_A \omega^2 \sin \omega t = \frac{(C+C_1)L_1}{M} \frac{d^2 U_g}{dt^2} + \left[ \frac{(C_1-C)R_s}{M} - (K_1+2K_2U_g+3K_3U_g^2) \right] \frac{dU_g}{dt} + \frac{U_g}{M}$$

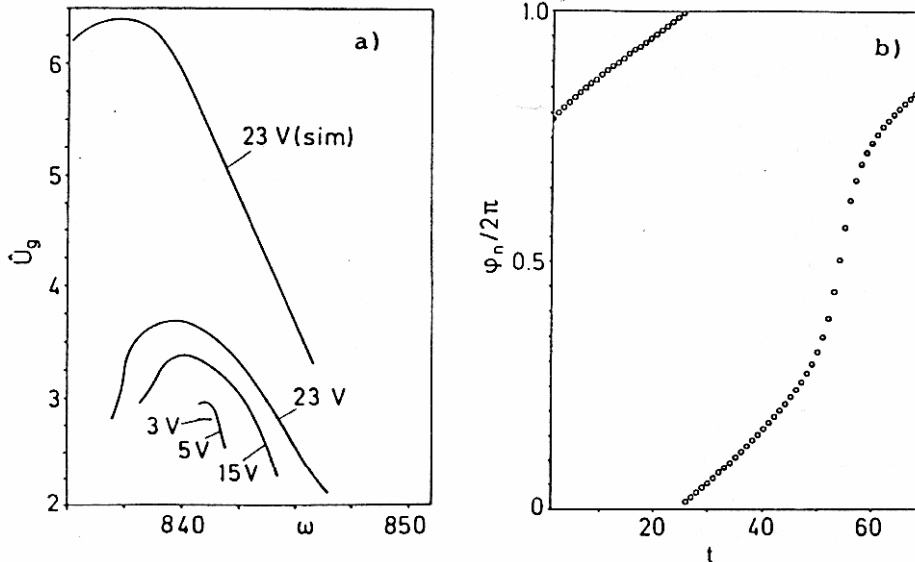


Abb.2.: a) Experimentelle Resonanzkurven des Oszillators: Schwingkreisamplitude  $\hat{U}_g$  über Störfrequenz  $\omega$ . Parameter der Kurven ist die Stör-Amplitude  $Y_A$ . Die oberste Kurve stellt eine numerische Simulation für 23V dar, die trotz der vernachlässigten Terme eine qualitative Übereinstimmung zeigt. b) Phasenunterschied  $\varphi_n$  zwischen Oszillator und Störung ausserhalb des Modelocking als Funktion der Zeit.

Für die Bestimmung der Resonanzkurven wurde die Amplitude der Schwingung der Sekundärspule in Abhängigkeit von der Frequenz und der Amplitude der Störung gemessen. Abb.2a stellt den Bereich der Resonanzkurven dar, in dem Modelocking beobachtet wird. Ausserhalb des Modelockingbereiches wurde die Phasendifferenz  $\varphi_n$  zwischen der Schwingung des Meißner Oszillators und der des störenden Frequenzgenerators gemessen (Abb.2b), die entsprechenden Poincaré-Abbildungen erstellt (Abb.3a) und das Flussvektorfeld rekonstruiert (Abb.3b).

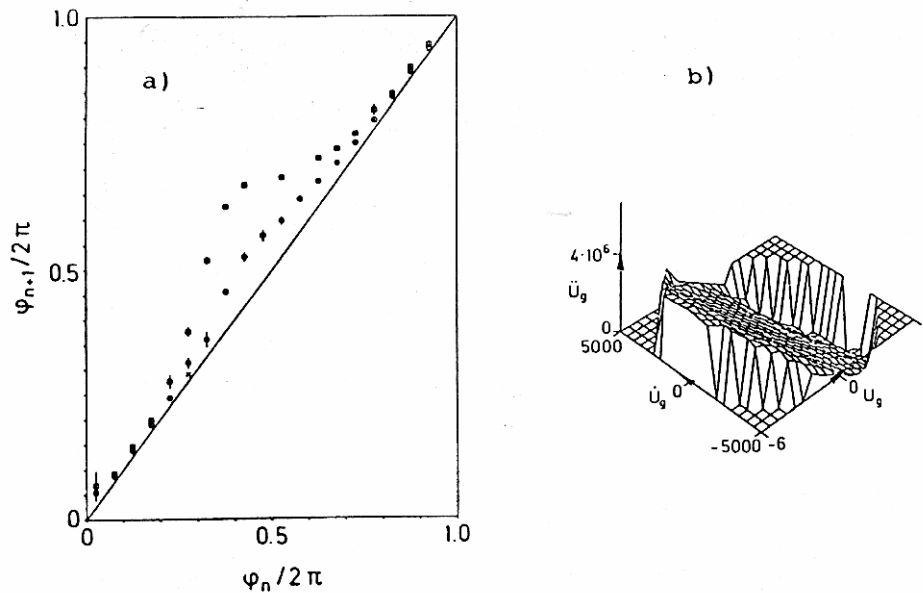


Abb.3: a) Poincaré-Abbildung der Schwingung ausserhalb des Modelocking-Bereiches. Es ist der Phasenunterschied  $\varphi_n$  beim aktuellen Nulldurchgang gegen den Phasenunterschied  $\varphi_{n+1}$  beim letzten Nulldurchgang der Schwingung aufgetragen, für Störfrequenzen 873 1/sec (Quadrate), 859 1/sec und 840.06 1/sec (Kreuz).

b) Auftragung der zweiten über der ersten Zeitableitung der Messdaten von  $U_g$  und den Messdaten selber. Zur graphischen Darstellung wurde  $U_g$  ausserhalb des elliptischen Bereiches in der  $U_g - \dot{U}_g$ -Ebene in dem die Messdaten liegen Null gesetzt.

## 2. Diskussion

Die experimentell gewonnenen Poincaré-Abbildungen (Abb.3a) zeigen das typische Verhalten für Typ I Intermittenz,  $/3,4/$ . Die stark unterschiedlichen Verhaltensweisen Modelocking und Intermittenz, also Chaos, werden durch strukturell identische Differentialgleichungen beschrieben. Um die experimentellen Daten zu beschreiben, ist es sinnvoll, die zugrundeliegende Differentialgleichung zu rekonstruieren. Die Methode der Rekonstruktion sei am Beispiel des van der Pol Oszillators kurz erläutert, der durch die Differentialgleichung:  $\ddot{x} = \epsilon(1-x^2) \cdot \dot{x} - \omega^2 \cdot x$

oder das System:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \epsilon(1-x_1^2) \cdot x_2 - \omega^2 \cdot x_1 \end{aligned}$$

beschrieben wird.  $\dot{x}_1$  und  $\dot{x}_2$  entsprechen den beiden Komponenten des Flussvektorfeldes. Abb.3b ist also als zweite Komponente des Flussvektorfeldes der Messung, welches durch zweimalige numerische Differentiation der Messdaten gewonnen wurde, zu interpretieren. Die Abhängigkeit der zweiten Komponente des Flussvektorfeldes von  $U_g$  und  $\dot{U}_g$  wird durch eine Polynomreihe approximiert. Die resultierenden Fit-Koeffizienten stellen eine Abschätzung der Parameter der Differentialgleichung dar /5/.

Die Anwendung dieser Methode auf die experimentellen Daten lieferte die linearen Terme auf 5% genau. Der nichtlineare Term konnte allerdings nicht erkannt werden, da er im Experiment um 7 Größenordnungen kleiner als die linearen Terme ist.

### 3. Zusammenfassung

Trotz der gemachten Näherungen läßt sich das System qualitativ beschreiben. Der Übergang vom Modelocking über Intermittenz ins Chaos ist deutlich zu erkennen. Die Flußvektoren lassen sich aus den gemessenen Daten rekonstruieren. Damit ist eine Abschätzung der Parameter der zugrundeliegenden Differentialgleichung möglich.

### 4. Literatur

- (1) J. Guckenheimer, P. Holmes, "Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer, New-York, 1983.
- (2) E. Meyer, D. Guicking, "Schwingungslehre", Vieweg, Braunschweig, 1974, Kap.5.1.
- (3) H. G. Schuster, "Deterministic Chaos, An Introduction", Physikverlag, Weinheim, 1984, Kap.4.1.
- (4) H. H. Haken, "Synergetik, eine Einführung", Springer-Verlag, Berlin, 1983, Kap.12.6.
- (5) J. Cremers, A. Hübler, Z. Naturforsch. 42a, 797(1987)

\* Teil der Doktorarbeit