

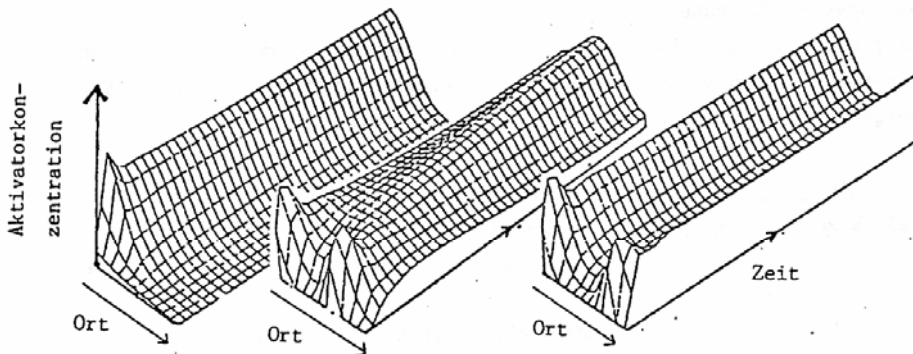
Stationäre Zustände in berandeten, normierten Systemen

W. Stelzel, H. Kainzbauer, A. Hübler*, E. Lüscher, Physik-Depart. TU München D-8046 Garching

Abstract: Es werden quantisierte klassische Systeme vorgestellt und ein Weg zur Übertragung der Mathematik der Quantenmechanik auf klassische Systeme aufgezeigt

1. Einleitung

Neuere Modelle über Strukturbildung, wie beispielsweise das Modell von Gierer und Meinhardt /1/, zeigen bei numerischen Simulationen ein Verhalten, das an quantenmechanische Systeme erinnert.



Parameter der Simulation: $p=0,003$; $\mu=0,01$; $p_0=0,0001$; $p_1=0,0$; $k=0,001$; $D_a=0,02$
 $p'=0,001$; $D_h=0,4$; $v=0,02$

Es ergeben sich, je nach Anfangsbedingungen, hochsymmetrische stationäre Zustände. Aufgrund dieser Analogie wollen wir untersuchen, ob es möglich ist, die Mathematik der Quantenmechanik zur Berechnung klassischer Systeme zu verwenden.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist, nach Eilenberger /2/, gleichbedeutend mit der Suche nach Erhaltungsgrößen.

2. Erhaltungsgrößen in homogenen Systemen

Für ein System in $h(x,y)$, das nicht explizit von x und y , aber von beliebigen Ableitungen nach x und y abhängt, existiert eine Erhaltungsgröße H in y mit $dH/dy=0$:

$$(1) H = \int_1^2 \left[-L + \sum_{u=1}^n \sum_{v=0}^n (\partial L / \partial h_{u,v}) h_{u,v} + \sum_{v=0}^n \sum_{u=2}^n \sum_{s=1}^{u-1} (-1)^{v+s} ((d/dx)^v (d/dy)^s \partial L / \partial h_{u,v}) h_{u+s,0} \right] dx \\ + \int \left[\sum_{v=1}^n \sum_{r=0}^{v-1} (-1)^r ((d/dx)^r \partial L / \partial h_{0,v}) h_{1,v-r-1} \right] dy \\ + \int \left[\sum_{v=1}^n \sum_{r=0}^{v-1} \sum_{u=1}^n (-1)^{r+1} (d/dy (d/dx)^r \partial L / \partial h_{u,v}) h_{u,v-r-1} \right] dy$$

mit der Nomenklatur: (2) $h_{u,v} = (d/dy)^u (d/dx)^v h$

Zum Beweis benötigt man das Hamiltonsche Variationsprinzip mit den üblichen Einschränkungen der Variation am Rand, und die daraus resultierende erweiterte Lagrangesche Gleichung.

Beispielsweise ist bei einem zeitunabhängigen System mit $L = -h^2 - h_x^2$ (elastische Schnur in parabelförmigem Kanal) die Differenz aus potentieller Energie und Wechselwirkungsenergie im Raum erhalten.

3. Klassische, harmonische Systeme3.a) Klassische Schrödingergleichung

Im folgenden wird immer vorausgesetzt, daß $h_{u,v}$ für $u,v < n$ an den Rändern verschwindet.

Für ein klassisches System, das nicht explizit von der Zeit abhängt erhält man mit der Nebenbedingung, daß das räumliche und zeitliche Quadratmittel der Amplitude konstant ist, (3) $\int h^2 dx dt = \text{konstant}$, folgende Bewegungsgleichung:

$$(4) \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^n (-1)^{v+u} ((d/dx)^v (d/dy)^u \partial L / \partial h_{u,v}) - \lambda h = 0$$

wobei λ der Eulersche Multiplikator ist, mit dem die Zwangsbedingung an die Bewegungsgleichung angeschlossen wurde. Betrachtet man beispielsweise ein Feld in h mit folgender Lagrangefunktion

$$(5) L = a(x,t)/2 h_t^2 - b(x,t)/2 h_x^2 - c(x,t)/2 h^2$$

so kommt man nach Abspalten eines schnell oszillierenden Anteils /3/ $h(x,t) = \varphi(x,t) \exp(-i\omega t)$ mit der Näherung $\varphi_t \ll \omega \varphi$, wobei $a\omega^2$ dem konstanten Teil von $c(x,t)$ entspricht ($c - a\omega^2 = d(x,t)$), zu

$$(6) (i\omega\varphi - \varphi_t) a_t + 2i\omega a \varphi_t + b_x \varphi_x + b \varphi_{xx} - d\varphi = \lambda \varphi$$

Für Systeme mit $a_t = b_x = 0$ findet man

$$(7) 2i\omega a \varphi_t = -b \varphi_{xx} + (d + \lambda) \varphi$$

was formal einer Schrödingergleichung mit orts- und zeitabhängigem Potential $d + \lambda$ entspricht und, falls man Operatoren äquivalent zur Quantenmechanik definiert, mit dem entsprechenden Formalismus gelöst werden kann.

Die klassische Schrödingergleichung stellt ein Kräftegleichgewicht dar.

$H\varphi = -b\varphi_{xx} + (d + \lambda)\varphi = E\varphi \triangleq$ gesamte, inhomogene Potentialkraft + Zwangskraft = modulierte Trägheitskraft.

Der Erwartungswert von $H \int \varphi H \varphi dx = \int \varphi (-b\varphi_{xx} + d\varphi + \lambda\varphi) dx = \int (b\varphi_x^2 + d\varphi^2 + \lambda\varphi^2) dx =$ Energie aus dem ortsabhängigen Teil der Potentiale und der Zwangskraft.

Die Lösungen der Schrödingergleichung kann man nach Eigenfunktionen des Systems entwickeln. Die Eigenfunktionen bilden ein orthogonales, vollständiges Funktionensystem /4/. Da die Schrödingergleichung eine lineare Differentialgleichung ist, gilt das Superpositionsprinzip. Mit dem Fouriertheorem und der erwähnten Vollständigkeit sind beliebige Funktionen als Mischung der Lösungsfunktionen darstellbar und damit ebenfalls Lösungen der Schrödingergleichung. Man erhält hier also noch keine Quantisierung.

Betrachtet man allerdings Systeme mit homogenem Potential oder verlangt in einer weiteren Nebenbedingung extremale Energie, so erhält man eine stationäre Schrödingergleichung und Quantisierung.

3.b) Klassische Unschärferelation

Für ein derartiges System kann man, genauso wie in der Quantenmechanik, Vertauschungsrelationen ableiten; z.B.: $[x, p] = -b$

Aus dieser Vertauschungsrelation erhält man eine Unschärferelation für die Wechselwirkungskraft, da $(\Delta F)^2 = (\Delta p)^2$: $(\Delta x)^2 (\Delta F)^2 \geq b^2/4$.

Hierbei bedeutet Δx die Varianz des mit dem Quadratmittel der Feldamplitude gewichteten Orts und ΔF die Varianz der Wechselwirkungskraft im Raum:

$$(\Delta x)^2 = \int x^2 h^2 dx - (\int x h^2 dx)^2, (\Delta F)^2 = \int h_x^2 dx - (\int h_x dx)^2$$

Die Unschärferelation fordert, daß die lokalen Unterschiede in der Wechselwirkungskraft groß sein müssen, wenn der Bereich großer Feldamplituden auf kleinem Raum begrenzt ist, bzw. daß der Bereich nennenswerter Feldamplituden einen großen Raum einnimmt, falls die Unterschiede in der Wechselwirkungskraft klein sind.

3.c) Schwingende Saite

Eine schwingende Saite, die, bis auf eine Perle, vollständig mit Perlen aufgefüllt ist, wird mit folgender Lagrangefunktion beschrieben:

$$(8) L = \int \left(-a/2 y_x^2 + \rho/2 y_t^2 + m\delta(x-x_0)/2 y_t^2 \right) dx + m/2 (x_0)_t^2$$

wobei $y(x,t)$ die Auslenkung der Saite und x_0 der Ort der fehlenden Perle, im folgenden mit "Loch" bezeichnet, ist.

Bei kleinen Massen der Perlen und großer Reibungskraft $\gamma (x_0)_t$ kann man die Lösungen des Systems mit einem Separationsansatz und der Störungstheorie berechnen. Sitzt das Loch in einem Schwingungsknoten, so wird die Bewegung der übrigen Saite durch das Loch nicht gestört; es ergeben sich stabile stationäre Zustände, bei denen sich das Loch nicht bewegt.

4. Nichtlineare Felder

Über die Beschreibung linearer Felder hinaus wäre z.B. die Anwendung der Mathematik der Quantenmechanik auf das zu Beginn erwähnte Strukturbildungsmodell von Gierer und Meinhardt interessant. Leider ist dies wegen der Nichtlinearität und der damit verbundenen Probleme bis jetzt nicht gelungen.

Die numerischen Simulationen zum Modell von Gierer und Meinhardt führte R. Stöckel durch. Wir danken Herrn O. Wohofsky, der Firma MBB und Herrn P. Deisz. * Teil der Promotionsarbeit

- /1/ H. Meinhardt und A. Gierer, Models of Biological Patternformation, Academic Press INC, London, 1982, Seite 10-17
- /2/ G. Eilenberger in Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, Kernforschungsanlage Jülich, Jülich, 1983
- /3/ A.S. Dawydow, Quantenmechanik, 5. Auflage, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978, Seite 216,217
- /4/ W. Greiner, Theoretische Physik, Band 4, Quantenmechanik 1, 3.Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Seite 83,84