

Rekonstruktion von Differentialgleichungen chaotischer
und experimenteller Oszillatoren

T.Kautzky, A.Hübler*, E.Lüscher, Physik-Dept., Technische Universität München,
D-8046 Garching

Überblick : Es wird eine neue Methode vorgestellt mit der, bei deterministischen Systemen aus Datensätzen eine obere Abschätzung ermittelt werden kann. Auch die Koeffizienten der zugrunde liegenden Differentialgleichung (DGL) können ermittelt werden, wenn sich das System durch eine einfache explizite DGL beschreiben läßt. Ferner werden Methoden zur Optimierung der Zustandsraumdarstellung angegeben.

1. Einleitung

In vielen Fällen kann zwar die DGL aus Grundgleichungen hergeleitet, aber nicht allgemein gelöst werden, da das Gleichungssystem nichtlinear ist und daher in der Regel keine Integrale existieren /1,2/. Wenn weder Integrale noch Parameter einer Lösung /3/ zur Beschreibung des Systems verwendet werden können, sind die DGL oder deren Parameter der einzige Satz von Erhaltungsgrößen, abgesehen von statistischen Korrelationen /3/. Haken /4/ zeigte, daß in solchen Systemen oft nur wenige einfache Moden das System beherrschen. Für den Laser und die Benard-Rayleigh-Konvektion hat Haken /5/ wesentlich einfachere DGL aus dem allgemeinen Gleichungssystem für diese wenigen Moden abgeleitet. Da diese nur in der Nähe von Phasenübergängen gelten, die Dynamik eines Systems aber auch sonst augenfällig einfach ist, ist es von Interesse, die Differentialgleichung eines Systems aus dessen Daten zu rekonstruieren. Da die DGL den Tangentialvektor an jedem Punkt im Zustandsraum angibt, benötigt man dazu einen Datensatz, aus dem sich eine Trajektorie im Zustandsraum und deren Tangentialvektoren eindeutig berechnen lassen. Erster Schritt zur Rekonstruktion der DGL ist die Ermittlung der Dimension des Systems.

2. Die Dimension des Systems

Eine untere Schranke dafür ist die fraktale Dimension D_f /2/. Eine obere Schranke erhält man, wenn man die Dimension der Zustandsraumdarstellung so lange erhöht, bis sich die Trajektorie überschneidungsfrei darstellen läßt. Da die Dichte der Punkte im Zustandsraum experimentell beschränkt ist, ist es unwahrscheinlich eine Überschneidung zu finden. Wir führen folgende Größen ein: Der Überschneidungsgrad $U(D, \vec{r}, \vec{s})$ der Tangenten an die Trajektorien zweier benachbarter Punkte im Zustandsraum der Dimension D ist der Betrag der Differenz der Tangentialvektoren der Trajektorien am Punkt \vec{r} bzw. \vec{s} . $U(D, \vec{r}, \vec{s}) = |\vec{t}(\vec{r}) - \vec{t}(\vec{s})|$. Die Überschneidungswahrscheinlichkeit $Wa(D, r)$ ist das Mittel des Überschneidungsgrades U über alle Messpunkte, d.h. einer Untermenge des Zustandsraums. $Wa(D, r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \overline{U(D, \vec{r}, \vec{s})}$, $|\vec{r} - \vec{s}| \in [r - \frac{\Delta r}{2}, r + \frac{\Delta r}{2}]$. Die Überschneidungsdimension D_c ist die kleinste Dimension bei der die Rekonstruktion Überschneidungsfrei wird, d.h. $D_c = \min\{D | Wa(D, r=0)=0\}$. Da die Punktdichte im Zustandsraum endlich ist, läßt sich der Grenzübergang $r \rightarrow 0$ nicht direkt durchführen, man betrachtet $Wa(D, r)$ als Funktion von r und extrapoliert Wa nach Null. Abbildung 1 zeigt als Beispiel die Überschneidungswahrscheinlichkeit Wa als Funktion des Abstands r für den Lorenzattraktor /6/ für verschiedene Dimensionen des Zustandsraums. Für die dritte und jede weitere Dimension ergibt sich durch Extrapolation $Wa(r=0)=0$. Die maximale Zahl der Freiheitsgrade ist somit drei, wie es dem Lorenzattraktor entspricht, der durch drei DGLn 1. Ordnung beschrieben wird. Diese Wahrscheinlichkeiten wurden bei einem Attraktor aus 15 000 Punkten durch Untersuchung von 450 zufällig gewählten Punkten ermittelt.

3. Optimierung der Darstellung

Um die DGL ermitteln zu können, muß der Attraktor entfaltet sein, d.h. die Krümmung der Trajektorie im Zustandsraum soll möglichst klein sein. Bei großen Krümmungen ändern sich die Tangentialvektoren und damit die Überschneidungswahrscheinlichkeit stark als Funktion vom Abstand r . dWa/dr kann zur Abschätzung der mittleren Krümmung und damit zur Optimierung der Darstellung verwendet werden.

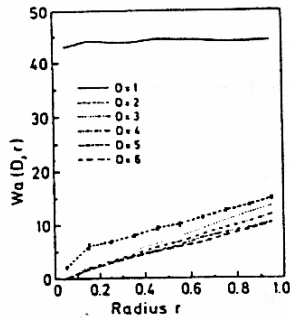


Abb.1
Überschneidungswahrscheinlichkeit
 W_a als Funktion des Abstandes r
für den Lorenzattraktor.

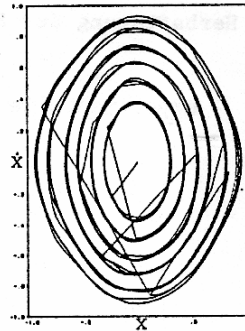


Abb.2 Zustandsraumdarstellung des
experimentell an einem
physikalischen Pendel gemessenen
Datensatzes.

4. Rekonstruktion

Durch numerische Integration des Lorenzattraktors bzw. eines van-der-Pohl-Oszillators wurde ein Datensatz erzeugt und eine Trajektorie im Zustandsraum mit den Koordinaten x, y, z rekonstruiert. Die Anpassung einer Potenzreihe an die Tangentialvektoren der Trajektorie liefert auf 5 geltende Ziffern genau die richtigen Koeffizienten.

5. Experiment

An realen einem physikalischen Pendel wurden Daten aufgenommen (Abb.2). Das Pendel besteht aus einem mittig gelagerten Aluminiumstab mit .7 m Länge und .9 kg Masse. An einem Ende ist eine Masse von .6 kg angebracht. Die Daten wurden mit einem Potentiometer mit einer Messfrequenz von 30 Hz aufgenommen. Um den Zustandsraum gut auszufüllen wurden die Daten aus einzelnen Sätzen zusammengestellt, der größte mit einem Maximalausschlag von 2.5 rad, der kleinste mit einem Maximalausschlag von .09 rad. Zum Vergleich wurde ein möglichst ähnlicher Datensatz durch numerische Integration des DGL-Systems $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -bx_2 - w^2 \sin(x_1)$, mit $b = .004$, $w = .125$, erzeugt und mit 1% Rauschen überlagert. Der simulierte und der experimentelle Datensatz wurden auf den Einheitsintervall normiert, um Legendrepolynome anzupassen. Der Fit liefert folgende Koeffizienten a_{ij} (nur betragsmäßig größere als .001 sind aufgeführt).

simulierte Daten		experimentelle Daten		angepasste Funktion
i j	a_{ij}	i j	a_{ij}	$f = \sum_j a_{ij} P_i(x_1/a) P_j(x_2/b)$
1 0	-.018	1 0	-.019	Normierungsfaktoren $a=2.5$ $b=.25$
1 2	.0	1 2	.001	
2 1	-.001	2 1	-.003	
3 0	.013	3 0	.012	

Man kann erkennen, daß die Koeffizienten von Simulation und Experiment im Wesentlichen übereinstimmen.

Wir bedanken uns bei Herrn Dr.O.Wohofsky und Herrn P.Deisz.

*Teil der Promotionsarbeit

/1/ Landau-Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd.1
Mechanik, 9.Aufl., Akademie-Verlag, Berlin(1979)

/2/ G. Eilenberger in Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie
Kernforschungsanlage Jülich, Jülich(1983)

/3/ P. Grassberger, I. Procaccia, Phys.Rev.Lett.50,346(1983)
Y. Termonia, Phys.Rev.A9,1612(1984)

/4/ H. Haken, Synergetics, An Introduction, 2.edition, p.175, Springer,
Berlin(1978)

/5/ wie /3/ p. 225 ff

/6/ E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20,130(1963)