25

ÜBER DIE STEUERUNG NICHTLINEARER SCHWINGER

A. Hübler*, G. Reiser, E. Lüscher
Physik-Dept. E13, Technische Universität München, D- 8046 Garching

Abstract: Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem nichtlineare gedämpfte Schwinger optimal, d.h. mit minimaler Blindleistung gesteuert werden können. Das Verfahren eignet sich auch zur Resonanzspektroskopie bei nichtlinearen Oszillatoren.

1. Einleitung

Die Anregung eines gedämpften harmonischen Oszillators zu einer bestimmten Schwingungsamplitude oder die Entnahme von Energie geschieht am günstigsten durch einen Antrieb mit der Resonanzfrequenz des Oszillators. Dann sind die damit verbundenen Blindleistungen und Blindleistungsverluste am kleinsten. Nichtlineare Oszillatoren besitzen keine Resonanzfrequenz. Die Eigenfrequenz ist, falls sie überhaupt sinnvoll definiert werden kann, abhängig von der Schwingungsamplitude. Heuristisch gesehen, müßte man die Antriebsfrequenz im Laufe der Zeit so verstellen, daß sie ständig mit der Eigenfrequenz übereinstimmt.

2. Resonanzen nichtlinearer gedämpfter Schwinger

Läßt man einen anharmonischen gedämpften Schwinger $\vec{x}$ aus einem angeregten Zustand abklingen,

(1) $d\vec{x}/dt^* = \vec{g}(\vec{x}, T-t^*, \vec{a}^\cdot)$, $\vec{a}$ = Parameter

so besitzt das zeitgespiegelte Zeitdifferential der Amplitude

(2) $\vec{F}(t^*) = -\vec{g}(\vec{x}, T-t^*, \hat{\vec{a}}) - \vec{g}(\vec{x}, T-t^*, \vec{a}^\circ)$

genau jenes Zeitverhalten, das man zum Antrieb eines gleichartigen Schwingers $\vec{y}$

(3) $d\vec{y}/dt = f(\vec{y}, t, \vec{a}^\circ)$ benötigt

Für

(4) $d\vec{y}/dt = \vec{f}(\vec{y},t) + \vec{F}(\vec{x},t^*=T-t)$

gilt

(5) $\vec{y}(t) = \vec{x}(T-t)$ ist Lösung für $\vec{f}=\vec{g}$

(6) Hypothese: a)Die Lösung (5) ist stabil

b)Bei gedämpften Potentialschwingern ist der Antrieb resonant.

Wir nennen einen Antrieb resonant, wenn die Absorptionsgüte $Q(T)=E(T) / T*B(T)$ (7) extremal ist. $E(T)$ ist jene Energie, die im Zeitintervall $[0,T]$ vom Antrieb auf den Oszillator übertragen wurde. Die Blindleistung B wird folgendermaßen definiert:

(8) $B_{1,2}(T) = \left| 1/T \int_0^T dE/dt \quad \Theta(\pm dE/dt)dt \right|$, $B(T) = \min(B_1,B_2)$, Θ=Stufenfkt.

3. Die Steuerung gedämpfter nichtlinearer Oszillatoren

Möchte man das experimentelle System $\vec{y}$ mit $d\vec{y}/dt = \vec{f}(\vec{y},t)$, das sich in der Umgebung des Zustands $\vec{y}_0$ befindet, in den Zustand $\vec{y}_1$ bringen, so wird dabei folgendermaßen vorgegangen:

1. Die Differentialgleichung $d\vec{x}/dt^* = \vec{f}(\vec{x},t^*,\vec{a})$ wird gelöst für $\vec{x}(t^*=0) = \vec{y}_1$, $\vec{x}(t^*=T) \approx \vec{y}_0$.
2. Aus dem Datensatz $\vec{x}(t^*)$ wird nach (2) der Antrieb des experimentellen Systems berechnet.

Mit der Konstante $\vec{a}$ kann die Geschwindigkeit, mit der das System den gewünschten Endzustand erreicht, eingestellt werden. Kleine zeitliche Variationen von $\vec{a}$ zerstören die Stabilität der Lösung in der Regel nicht. Damit kann $\vec{a}$ zur Steuerung des nichtlinearen Systems benutzt werden.

4. Numerische Beispiele

Möchte man einen eindimensionalen nichtlinearen Oszillator

(9) $d^2y/dt^2 + 0.002\, dy/dt - 10y + 10y^3 = 0$

der sich in der Nähe des Grundzustands y_0 befindet, $|y(t=0) - y_0| < \mu$, zu einer Schwingung mit der Maximalamplitude y_1 anregen, so ergibt sich:

(10) $d^2/dt^2\, y(t)+0.002\, d/dt\, y(t)-10y(t)+10y(t)^3 = -0.002(a+1)\, d/dt^*\, x(t^*=T-t)$

mit (11) $(d/dt^*)^2\, x(t^*) +0.002a\, d/dt^*\, x(t^*) - Ax(t^*) + Bx(t^*)^3 = 0$

Zunächst wird nun (10) für A=B=10 numerisch gelöst. Die numerische Integration startet von $x(t^*=0)=y_1$ und bricht zu dem Zeitpunkt T ab, wenn gilt $|x-y_0| \ll \mu$.

Aus dem Datensatz $x(t^*)$ läßt sich nach (2) der Antrieb berechnen. In Abb. 1 ist die Anregung eines multistabilen Oszillators dargestellt.

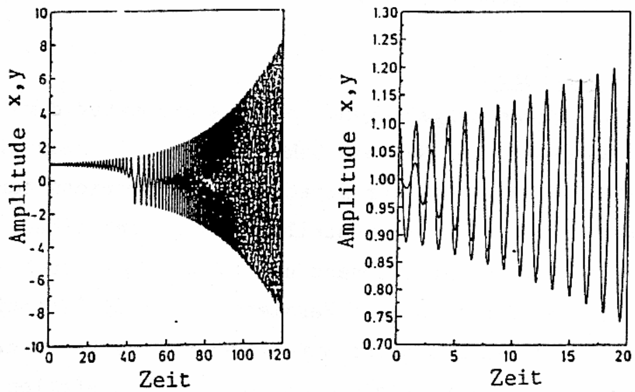

Abb.1 Resonante Anregung eines nichtlinearen Oszillators nach Gl.(10), a=0.5

Mit dem Steuerparameter a kann eingestellt werden, wie schnell das System Energie aufnimmt bzw. abgibt (Abb. 2). Für $a>1$ nimmt der Oszillator vom Antrieb Energie auf und die Schwingungsamplitude wächst. Für $0<a<1$ nimmt der Oszillator vom Antrieb zwar Energie auf, die Schwingungsamplitude fällt dennoch ab. Für $a<0$ wird der Ozillator vom Antrieb gebremst, die Schwingungsamplitude fällt stark ab.

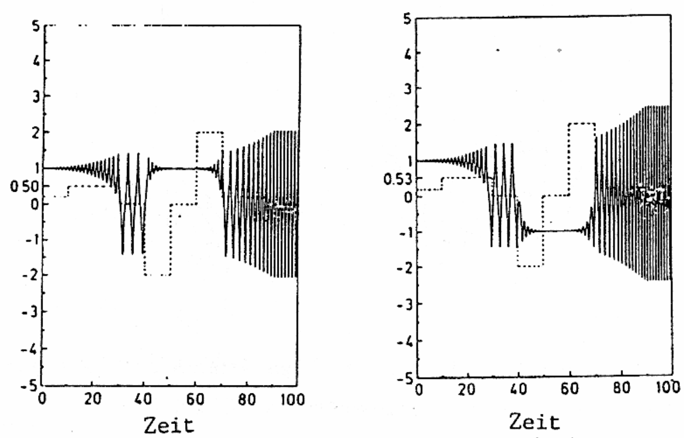

Abb.2 Die Steuerung eines multistabilen Schwingers (10) in zwei Beispielen. Dargestellt ist die Zeitabhängigkeit des Steuerparameters a (- - -) und der Schwingungsamplitude (-----).

5. Resonanzspektroskopie

Bisher sind wir davon ausgegangen, daß die Parameter der Differentialgleichungen des experimentellen Systems bekannt sind. Stimmen die Parameter jener Differentialgleichung, die zur Berechnung des Antriebs benutzt werden, und jene Parameter, die das experimentelle System beschreiben, nicht genau überein, so ist der Antrieb nicht resonant und in der Regel auch nicht stabil. Durch eine systematische Variation der Parameter jener Differentialgleichung, die zur Bestimmung des Antiebs benutzt wird, können die Resonanz und damit auch die Parameter der Differentialgleichung des experimentellen Systems ermittelt werden (Abb. 3), wobei sich das experimentelle System vor jeder Anregung in der Nähe des Grundzustands befinden soll. Der Antrieb wird mit Hilfe der Differentialgleichung (11) berechnet, wobei bei jeder Einzelanregung a so eingestellt wird, daß das System bei Resonanz den Potentialberg gerade erreicht (a = 0.5 für $V=(x_t)^2/2 - 10x^2/2 + 10x^4/4 < 0.04$; a=0 sonst).

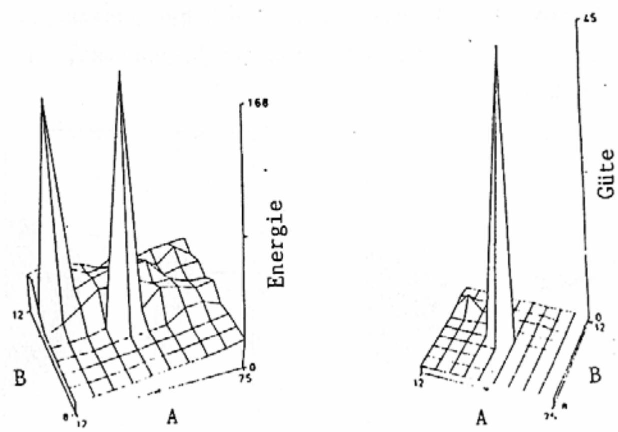

Abb. 3 Die Schwingungsamplitude und der Logarithmus der Güte gemittelt über 30 Zeitschritte als Funktion der Modellparameter A und B.

Für Diskussionsbeiträge und Unterstützungen bedanken wir uns bei Dr. W. Kroy, Dr. H. Zinner, Dr. O. Wohofsky und bei der Firma MBB.

/1/ Hans Jenny, Kymatik, Basilius Presse, Basel, 1967

(* Teil der Promotionsarbeit)