

23

Physikalische Strukturen, numerische Simulation

### EXTREMALEIGENSCHAFTEN DENDRITISCHER STRUKTUREN

R. Georgii, A. Hübler\*, E. Lüscher, Physik-Dept., Technische Universität  
München, D-8046 Garching

Überblick: Es wird untersucht unter welchen Voraussetzungen die stationären Zustände von flexiblen Verankerungen mit jenen Zuständen übereinstimmen, bei denen die Dissipation extremal ist.

#### 1. Einleitung

In letzter Zeit wurden einige aufregenden Eigenschaften von Dendriten in der Naturwissenschaft bekannt/1/. Sie treten meist in Zusammenhang mit Nichtgleichgewichtszuständen auf, die Grundstrukturen von Wurzeln und Ästen, Nervensträngen und Blutbahnen. In der Physik sind sie z.B. bei Kristallisationsvorgängen wichtig. Dendritische Einlagerungen (Kyrilithen) geben Porzellan eine besonders hohe Festigkeit. Da die meisten technischen Metalle dendritisch kristallisiert sind, ist die Verzahnung der Mikrodendriten entscheidend für deren elastischen Eigenschaften. Es ist daher zu vermuten, daß es sinnvolle Optimierungsvorschriften gibt, die durch dendritische Strukturen erfüllt werden. Im folgenden soll gezeigt werden, daß optimale Verankerungen eine dendritische Form haben.

#### 2. Stationäre Systeme mit minimaler Dissipation

Zunächst betrachten wir folgendes Gedankenexperiment: Auf zwei schlecht leitenden Plattenelektroden  $E_1, E_2$  liegt ein gut leitender Stab  $S$  der sich parallel zu den Platten bewegen kann. Eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft wirkt der Verschiebung des Stabes entgegen. Die elektrischen Anschlüsse befinden sich am unteren Ende der Platten, die elektrischen

Zuführungen  $Z_1, Z_2$  sind gute Leiter und verlaufen parallel zum Stab. Durch die

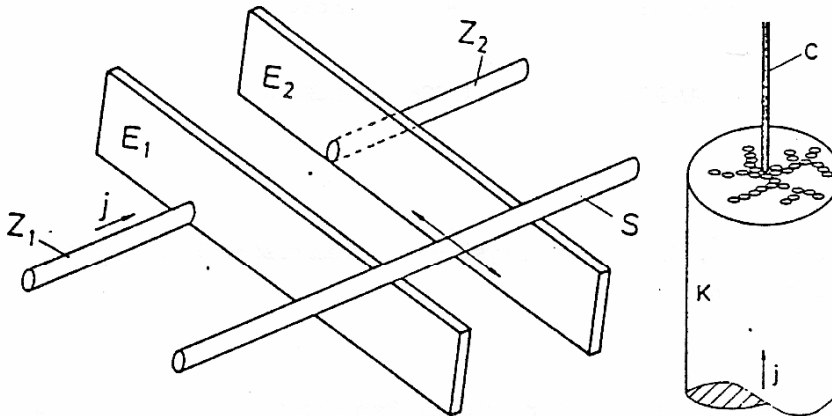


Abb. 1 siehe Text

Abb.2 siehe Text

Anordnung soll ein konstanter Strom fließen. Durch den relativ hohen Widerstand der Platten baut sich ein elektrisches Feld zwischen den Zuführungen  $Z_1, Z_2$  und dem Stab auf, d.h. im System wird potentielle Energie gespeichert. Da diese potentielle Energie von der Position des Stabes abhängt, wirkt auf den Stab eine Kraft die ihn zu einer Gleitbewegung veranlaßt. Da der Bewegung des Stabes Reibungskräfte entgegenwirken, hat der Stab die Tendenz dem Zustand mit der geringsten potentiellen Energie entgegen. Aufgrund der Geometrie des Versuchsaufbaus wird genau dann auch der Ohm'sche Widerstand des Systems und damit auch die Dissipation minimal. Das System strebt somit dem Zustand mit der geringsten Dissipation entgegen. Dieser Gedankengang läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Bei einem gedämpften mechanischen System ist der Zustand mit der geringsten potentiellen Energie ein stabiler stationärer Zustand, wenn die potentielle Energie nicht explizit von der Zeit abhängt. Wenn bei einem stationären Zustand die Dissipation minimal (maximal) ist so besitzt das System einen Endzustand mit minimaler (maximaler) Entropieproduktion /2/.

### 3. Verankerungen mit minimaler Dissipation

In einem elektrisch schlecht leitenden langen (Kohle-)Stab K fließt ein zeitlich konstanter elektrischer Strom und wird an der Staboberseite von einer dünnen gutleitenden (Kupfer-)Elektrode aufgenommen (Abb. 2). Aufgrund der inhomogenen Stromverteilung im Kohlestab ist der Übergangswiderstand hoch. Nun werden auf der Staboberseite kleine Kupferplättchen ausgelegt, die nur einen Teil der Staboberseite bedecken. Die Plättchen können sich unter großen Reibungsverlusten bewegen. Die räumliche Verteilung der Plättchen ist genau dann zeitunabhängig wenn das Gesamtpotential  $V = \int e(x)E(x)^2 dx$  extremal ist, wobei  $e(x)$  die Dielektrizitätskonstante und  $E$  die elektrische Feldstärke ist. Sind die Dichte der potentiellen Energie  $e(x)*E(x)^2$  und die Dissipationsdichte  $s(x)*E(x)^2$  ( $s$  = Leitfähigkeit) proportional zueinander so ist nach obigen Überlegungen die Gesamtdissipation direkt proportional zum Gesamtpotential. Beim vorgestellten Modell ist die Dissipation bei stabilen Endzuständen minimal. Die entstehende Form aus Kupferplättchen kann als elektrischer Verankerung mit minimalem Übergangswiderstand aufgefaßt werden. Aufgrund der mathematischen Analogien zwischen Wärmeleitung und elektrischer Leitung, lassen sich die Ergebnisse leicht auf thermische Anker übertragen. Bei der Wärmeleitung lautet das analoge Optimierungsproblem: Welche Form der thermisch gut leitende Anker (konstantes Volumen) besitzen, damit bei konstantem Wärmedurchfluß durch das System die mit dem Übergang( Abb. 2) verknüpfte Entropieproduktion minimal ist, d.h. i.a. die Temperaturdifferenz, gemessen in großem Abstand vom Übergang, zwischen den beiden Materialien am kleinsten ist. Diese Ergebnisse lassen sich auch auf andere Transportphänomene, wie die Ionenleitung, Kraftfluß und Informationsfluß übertragen.

### 4. Die Form optimaler Verankerungen

In der Simulation wurden mit einem Monte-Carlo-Algorithmus /3/ stationäre Verteilungen der Kupferplättchen ermittelt. Mit einem Relaxationsalgorithmus wurde die Feldverteilung auf der Oberseite des Kohlestabes ermittelt unter der Annahme, daß dort eine räumlich und zeitlich konstante Quellstärke herrscht und die elektrische Leitung nur in einer dünnen Schicht an der Oberseite des Kohlestabes stattfindet. Aus dem elektrischen Feld werden die Kräfte auf die Teilchen berechnet. Die Gesamtdissipation bei einer dendritischen Form verringert sich gegenüber dem Kreisförmigen Zustand

um ca. 30% wenn die Kupferplättchen 2% der Oberfläche ausfüllen.

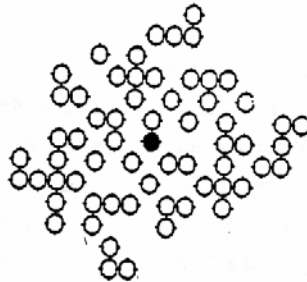


Abb. 3 zeigt, daß die entstehenden Strukturen eine dendritische Form besitzen.

Wir bedanken uns bei den Doktores O.Wohofsky, W. Kroy, H. Zinner und der Firma MBB für wertvolle Unterstützung.

/1/ B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman (1983)

/2/ I. Prigogine, Vom Sein zum Werden, 4. Auflage, Piper, München(1985), S.98ff

/3/ K. Binder in Domb, Phase Transitions and Critical Phenomena, Ac. Press., Vol. 5b (1976)

\* Teil der Promotionsarbeit