

BESCHREIBUNG DENDRITISCHER STRUKTUREN ZÄHER FLUIDE

G. Feuerecker, R. Wittmann, A. Hübler*, E. Lüscher,
Physik-Department TU München, D-8046 Garching.

Überblick : Die Entstehung dendritischer Strukturen wird durch ein hydrodynamisches Modell erklärt und mit einem Computer simuliert. Simulation und Experiment werden mit Hilfe der Fraktalen Dimension verglichen.

1. Einleitung

Zur quantitativen Beschreibung dendritischer Strukturen ist die Analyse großer Datensätze nötig. Mit den Mitteln der Differentialgeometrie ist das oft nicht möglich, da viele dendritische Strukturen sich nicht auf allgemeine geometrische Formen vereinfachen lassen, ohne dabei wesentliche Information zu verlieren. Mandelbrot behauptet, daß die Natur in ihren Formen nicht nur ein anderes Maß, sondern eine vollkommen andere Ebene der Komplexität zeigt. /1/. Trotzdem kann die Entstehung einiger sehr komplexer Strukturen mit Hilfe elementarer Gleichungen verstanden und zur Überprüfung des Modells mit einem Computer simuliert werden. Das quantitative Vergleichskriterium ist die Fraktale Dimension, die sich schon zur experimentellen Beschreibung dieser Strukturen bewährt hat /2/.

2. Experiment, die Strukturen.

Zwischen zwei parallelen Platten befindet sich ein Tropfen eines zähen Fluids (Deltinol Langzeit-Fett, NLGI-Grad 2). Die Platten werden auf einen definierten Abstand (zwischen 0.5 mm und 3 mm) zusammengedrückt, so daß ein kreisförmiger Fleck entsteht (Durchmesser 3.5 cm). Zieht man nun die Platten mit einer definierten Geschwindigkeit (1.25 cm/s) auseinander, so wird sich die Fläche, die der Fleck auf den Platten einnimmt, verkleinern. Je nach Wahl

der Versuchsparameter wird sich ein Kreis oder eine mehr oder weniger verzweigte Struktur ausbilden. (Bild 1)

3. Modell und Simulation

Wir betrachten ein zweidimensionales Problem (mit den Platten in der x-y-Ebene). Die Strömung zwischen zwei Platten läßt sich aus der Navier-Stokes-Gleichung (Vernachlässigung von Trägheits- und Gewichtskräften) ableiten:

$$\vec{j} := -\text{grad}(p)/\mu \quad (1), \quad \text{mit } \mu := 12\eta/h^2$$

wobei η die dynamische Viskosität, h den Plattenabstand und \vec{j} die Strömungsgeschwindigkeit darstellt. Da eine Strömung nach z nicht definiert ist, wird diese durch eine Quelle dargestellt. Damit folgt aus der Volumenerhaltung:

$$\text{div}(\vec{j}) := \dot{h}/h \quad (2). \quad (\text{in } (1))$$

$$\Rightarrow \nabla^2 p := \mu \dot{h}/h \quad (3).$$

Die Oberflächenspannung legt die Randbedingung für den Druck fest. Damit kann die Druckverteilung relativ einfach mit Hilfe eines Relaxationsalgorithmus berechnet werden. Aus (1) ergibt sich die Strömungsgeschwindigkeit am Rand, deren Maximalwert auf 1 Pixel pro Schritt normiert wird. Der Zusammenbruch der horizontalen Strömung (beim 3fachen ursprünglichen Plattenabstand) liefert eine scharfe Abbruchbedingung.

Anschaulich kann man sich die Strukturbildung folgendermaßen vorstellen: Die durch (3) erhaltene Druckverteilung (ohne Oberflächenspannung, d.h. Druck am Rand = 0) begünstigt die Ausbildung von Kanälen, da ein Randpunkt, der durch Fluktuationen in eine beliebig kleine Ausbuchtung gerät, einen größeren Druckgradienten erfährt als die Randpunkte der sonst glatten Oberfläche. Damit wird er schneller nach innen wandern als die übrigen Randpunkte seiner Umgebung, das heißt die Ausbuchtung wird größer, was wiederum einen größeren Druckgradienten bedeutet (destabilisierender Effekt). In Konkurrenz dazu steht der stabilisierende Effekt der Oberflächenspannung (die in die Randbedingung für den Druck eingeht), welche das Ausbilden von Kanälen behindert. Die Form der Struktur ist das Ergebnis der Konkurrenz des stabilisierenden mit dem destabilisierenden Effekt: Sinkende Oberflächenspannung (oder steigendes \dot{h}) führen zur Ausbildung immer verzweigterer Strukturen. Bemerkenswert ist, daß die Simulation keine Fit-Parameter, sondern nur physikalische Größen enthält.

4. Vergleich von Experiment und Simulation

Als beste objektive Größe zur Beschreibung der Strukturen erkannten wir

die "Fraktale Dimension" D der Kantenlinie, die mit einem Box-counting-Algorithmus /3/ ermittelt wurde.

Diese hat einen für die Struktur charakteristischen Verlauf /2/.

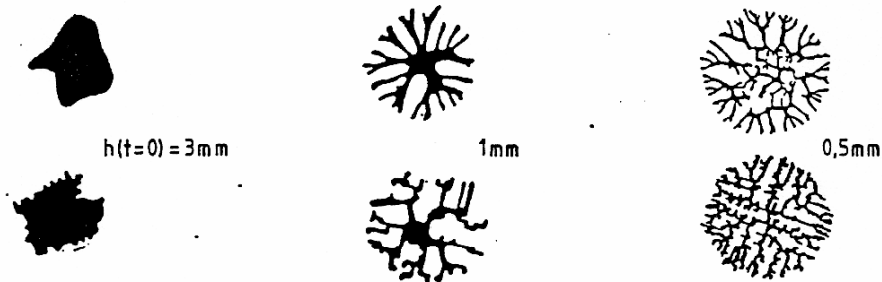


Abb.1: Dendritische Strukturen; oben aus Experiment, unten aus Simulation ($\eta=0.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$; $\sigma=0.05 \text{ N/m}$ geschätzt).

Der Vergleich von Experiment und Simulation zeigt gute Übereinstimmung, sowohl subjektiv - Eindruck beim Betrachten der Strukturen (Abb.1) -, als auch objektiv mit der Fraktalen Dimension als Kriterium: (Abb.2).

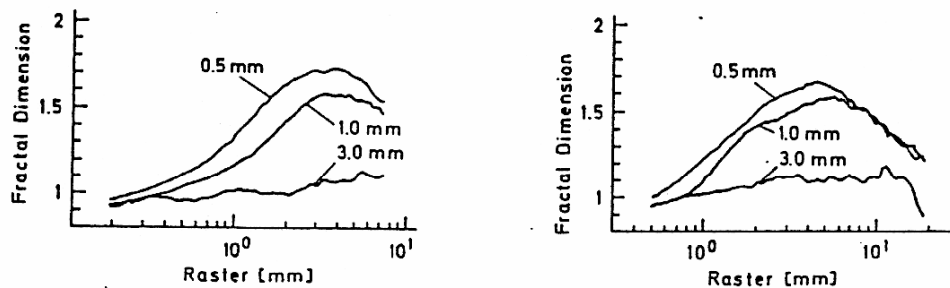


Abb.2: Die Fraktale Dimension von Experiment (links) und Simulation (rechts).

Wir danken Herrn Dr. Kroy, Herrn Dr. Wohofsky und der Firma Messerschmitt-Bölkow-Blohm für Ihre Unterstützung.

*Teil der Promotionsarbeit

5. Schrifttum:

- /1/ B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature. Freeman, N.Y. 1983
- /2/ G. Feueracker, A. Hübler, E. Lüscher: H.P.A. 59 : 128 (1986)
- /3/ K. Klotz, A. Hübler, E. Lüscher: H.P.A. 59 : 124 (1986)