

Skalengesetze für den maximalen Energieaustausch nichtlinearer gekoppelter Systeme

T. Eisenhammer, T. Hecht, A. Hübler* und E. Lüscher
 Physik Department der Technischen Universität München, D-8046 Garching
 Professor Manfred Eigen zum 60. Geburtstag herzlichst gewidmet

Werden zwei klassische Oszillatoren gekoppelt, so ist im generischen Fall die Energie des einzelnen Oszillators nicht erhalten. Der Energieaustausch zwischen den Schwingern ist eine experimentell leicht zugängliche Meßgröße und technisch von großer Relevanz. Materialzerstörungen infolge einer Resonanz hängen in erster Ordnung von der Größe der übertragenen Energie ab. Auch nichtlineare Schwinger, bei denen die Energie nicht exakt erhalten ist, reagieren sehr empfindlich auf resonante Anregungen [1] und in vielen Fällen mit einer komplexen Dynamik [2], die zumindest qualitativ sehr ähnlich derjenigen der konservativen Schwinger ist [3]. Im folgenden beschränken wir uns auf konservative Oszillatoren und untersuchen den Energieaustausch zwischen einem harmonischen und einem anharmonischen Oszillator, die harmonisch gekoppelt sind. Die Energie E_1 des harmonischen Schwingers sei:

$$E_1 = \frac{M_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{M_1 x_1^2 \omega_1^2}{2},$$

die des anharmonischen:

$$E_2 = \frac{M_2 \dot{x}_2^2}{2} + V$$

mit

$$V = U \frac{M_2}{2} \left(\frac{G^2}{4} - \frac{G}{x_2 + \frac{1}{G}} + \frac{1}{(x_2 + \frac{1}{G})^2} \right)$$

(Keplerpotential) oder

$$V = \frac{M_2}{2} A \left(\frac{B^2}{4} + x_2^4 - Bx_2^2 \right), \quad B > 0$$

(Doppelmuldenpotential) oder

$$V = \frac{M_2}{2} A (x_2^4 - Bx_2^2), \quad B \leq 0$$

(x^4 -Potential). U, G, A, B sind Parameter, die die Potentialform beschreiben, x_1, x_2 sind die Auslenkungen, M_1, M_2 die Trägheitskoeffizienten, und ω_1 ist die Eigenfrequenz des harmonischen Schwingers. Für die Kopplung der beiden Schwinger wird das Federpotential

$$E_k = \frac{K(x_1 - x_2)^2}{2} \quad (K = \text{Kopplungskonstante})$$

verwendet. $E_g = E_1 + E_2 + E_k$ ist die Gesamtenergie E_g des Systems. Im ungekoppelten Zustand ($K=0$) führt der nichtlineare Oszillator periodische Schwingungen mit der Schwingungsdauer T_2 aus. Die Grundfrequenz dieser Schwingung $\omega_g = 2\pi/T_2$ hängt i.a. von der Energie E_2 des anharmonischen

Oszillators ab, d.h. $\left| \frac{d\omega_g}{dE_2} \right| \neq 0$. Ist die Kopplung K ungleich Null, so führt E_2 zeitliche Oszillationen durch. Der maximale Energieaustausch ΔE ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Maxi-

malwert und dem Minimalwert der Energie E_2 des anharmonischen Oszillators. Da die Anfangsbedingungen der Oszillatoren starken Einfluß auf den Wert des Energieaustausches haben, wurden 10-30 Simulationen [4] zu jedem Parametersatz mit zufällig gewählten Anfangsbedingungen durchgeführt. Wählt man ω_1 gerade so, daß zu Beginn der Simulation die Resonanzbedingung $\omega_1 = \omega_g$ erfüllt ist, so skaliert bei einem anharmonischen Potential vom Typ (1) der maximale Energieaustausch ΔE folgendermaßen mit den Systemparametern (Fig. 1, 2a):

$$\Delta E = 4,2 K^{1/2} \left(\frac{E_1 \cdot E_2}{M_1 \cdot M_2} \right)^{1/4} \cdot M_2^{1/6} \left(G \cdot \omega_g \cdot \left| \frac{d\omega_g}{dE_2} \right| \right)^{-1/3},$$

wobei

$$\omega_g = \frac{1}{4UG} \cdot \left(UG^2 - \frac{8E_2}{M_2} \right)^{3/2}. \quad (1)$$

Die Parameter wurden beim Keplerpotential im folgenden Bereich variiert: $0,1 < G < 14,5$; $0,235 < U < 1255$; $0,0001 < E_2 < 50$; $0,001 < M_2 < 50$; $0,01643 < \omega_g < 34,158$; $0,008477 < \left| \frac{d\omega_g}{dE_2} \right| < 1315$; $0,5 < E_1 < 15$; $0,1 < M_1 < 20$; $5 \cdot 10^{-9} < K < 0,05$. Beim Doppelmulden- und x^4 -Potential ergibt sich folgender Zusammenhang (Fig. 2b, 3a):

$$\Delta E = 4,3 K^{1/2} \left(\frac{E_1 \cdot E_2}{M_1 \cdot M_2} \right)^{1/4} \cdot f \left(\frac{B}{B_g} \right) \cdot \left(\omega_g \cdot \left| \frac{d\omega_g}{dE_2} \right| \right)^{-1/2}, \quad (2)$$

wobei $B_g = (8E_2/AM_2)^{0,5}$.

Gleichung (2) ergibt sich aus Simulationen in folgenden Parameterbereichen: $0,2 < A < 200$; $-20 < B < 50$; $1 < E_1 < 100$; $0,1 < E_2 < 1000$; $0,1 < M_1 < 2000$; $0,1 < M_2 < 10000$; $0,21 < \omega_g$

* Teil der Promotionsarbeit

$< 12,44; 0,00349 < \left| \frac{d\omega_k}{dE_2} \right| < 422; 0,0002 < K < 0,02$. Beim Doppelmuldenpotential verschwindet ω_k für $B=B_k$, während $\left| \frac{d\omega_k}{dE_2} \right|$ divergiert. Die Funktion f ist nur in der Umgebung dieses kritischen Werts, bei dem die Auswertung des Terms $\omega_k \left| \frac{d\omega_k}{dE_2} \right|$ der Formel (2) pro-

blematisch ist, nichttrivial (Fig. 3a). Die Gleichungen (1), (2) gelten nur für schwache Kopplung. Der Maximalwert der Kopplungsenergie E_k muß mindestens eine Zehnerpotenz geringer sein als ΔE , E_1 und E_2 . In zwei Fällen ergaben sich bei den Simulationen Abweichungen von den Formeln (1), (2). Nach Formel (1) ergibt sich ein etwas höherer Energieaustausch als numerisch berechnet, wenn das Verhältnis E_2 zu M_2 geringer als ca. 10^{-2} wird. Abweichungen resultieren ferner, wenn der nach den Formeln (1), (2) berechnete Energieaustausch größer als die Gesamtenergie des Systems ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der anharmonische Oszillator in guter Näherung durch einen harmonischen Oszillator approximiert werden kann, d.h. beispielsweise E_2 sehr klein ist (Fig. 3b). Die Abhängigkeit des Energieaustausches von der Eigenfrequenz ω_1 des harmonischen Oszillators in der Umgebung von ω_k ist in Fig. 4 dargestellt. Für alle drei Potentialtypen ergibt sich eine „Resonanzkurve“, gekennzeichnet durch ein mehr oder minder ausgeprägtes Plateau und einen scharfen Rand. Figur 5 zeigt, daß eine Korrelation zwischen der Halbwertsbreite der „Resonanzkurve“ ω_h und der maximalen Frequenzverschiebung in Resonanz ω_a besteht, wobei ω_a aus dem maximalen Energieaustausch in Resonanz und der Variation der Grundfrequenz des anharmonischen Oszillators mit der Energie abgeschätzt wird: $\omega_a = \left| \frac{d\omega_k}{dE_2} \right| \Delta E$.

Aus den Simulationen ergibt sich:

$$\omega_a = \omega_h.$$

Der Energieaustausch zwischen einem harmonischen und einem anharmonischen Oszillator kann durch relativ einfache Potenzgesetze angegeben werden, die über viele Zehnerpotenzen erfüllt sind. Bei völlig verschiedenen Potentialtypen ergeben sich teilweise die gleichen Potenzgesetze. Die einfache Dar-

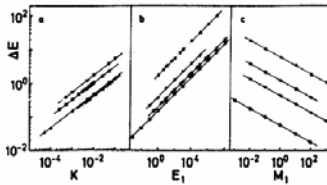


Fig. 1. Der maximale Energieaustausch als Funktion der Parameter des harmonischen Oszillators zu Beginn der Simulation. Bei b) und c) wurde auch die Kopplungskonstante K variiert, wobei der Energieaustausch entsprechend der aus a) gewonnenen Relation reskaliert wurde. a) $\circ E_1 = E_2 = 3, M_1 = M_2 = 1, U = 60, G = 2$; $\square E_1 = 5, E_2 = 20, M_1 = M_2 = 1, A = 200, B = 0$; $\nabla E_1 = E_2 = 100, M_1 = 20, M_2 = 12, A = 200, B = 0,5$; \blacktriangle wie ∇ , aber $B = 0,575$. b) $\circ E_2 = 3, M_1 = M_2 = 1, U = 60, G = 2, K = 0,004$; $\square E_2 = 1, M_1 = 10, M_2 = 6, A = 300, B = 0, K = 0,0375$; $\blacktriangle E_2 = 100, M_1 = 20, M_2 = 12, A = 200, B = 0,4, K = 0,075$; ∇ wie \blacktriangle , aber $B = 0,595$. c) $\circ E_1 = 1,8, E_2 = 0,2, M_2 = 0,1, U = 100, G = 1,2, K = 0,001$; $\square E_1 = 5, E_2 = 20, M_2 = 5, A = 100, B = 0, K = 0,01$; $\blacktriangle E_1 = 100, E_2 = 100, M_2 = 12, A = 200, B = 0,4, K = 0,02$; $\nabla E_1 = 1, E_2 = 20, M_2 = 0,95, A = 10, B = 4, K = 0,005$

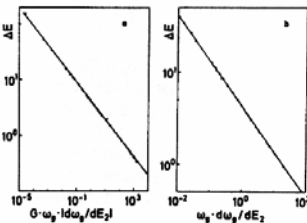


Fig. 2. Der maximale Energieaustausch als Funktion von $G \cdot \omega_k \cdot \left| \frac{d\omega_k}{dE_2} \right|$ (Keplerpotential)

(a) und $\omega_k \cdot \left| \frac{d\omega_k}{dE_2} \right|$ (x^4 -Potential) (b). Die Simulationen wurden mit unterschiedlichen Trägheitskoeffizienten, Energien und Kopplungskonstanten durchgeführt, wobei der Energieaustausch nach Formel (1) bzw. (2) reskaliert wurde (Systemparameter wie bei Formel (1) bzw. $0,1 < A < 9000, B = 0, 1 < E_1 < 100, 0,01 < E_2 < 1000, 0,1 < M_2 < 10000, 0,724 < \omega_k < 35,8, 0,00376 < \left| \frac{d\omega_k}{dE_2} \right| < 42,34, 0,001 < K < 0,01, 0,1 < M_1 < 2000$)

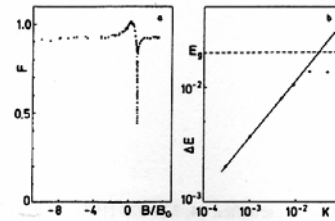


Fig. 3. Die Funktion f in Abhängigkeit von B/B_0 (a) und der maximale Energieaustausch als Funktion der Kopplungskonstanten K beim x^4 -Potential (b). Kommt der nach Formel (2) berechnete Energieaustausch in die Größenordnung der Gesamtenergie des Systems E_k , treten Abweichungen zwischen den nach Formel (2) berechneten Werten (durchgezogene Linie) und den Simulationsergebnissen auf ($A = 200, B = -0,04, E_1 = 0,01, E_2 = 0,01, M_1 = 1, M_2 = 10$)

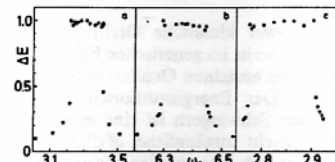


Fig. 4. Der maximale Energieaustausch (normiert auf den Energieaustausch in Resonanz) als Funktion der Frequenz ω_1 für drei Potentialtypen. a) Keplerpotential: $E_1 = E_2 = 3, M_1 = M_2 = 1, U = 25, G = 2, K = 0,006324, \omega_k = 3,313 \rightarrow$ in Resonanz $E = 0,376$; b) x^4 -Potential: $E_1 = 5, E_2 = 20, M_1 = M_2 = 5, A = 100, B = 0, K = 0,05, \omega_k = 6,373 \rightarrow$ in Resonanz $E = 1,88$; c) Doppelmuldenpotential: $E_1 = 1, E_2 = 12, M_1 = M_2 = 1,8, A = 25, B = 1,4, K = 0,005, \omega_k = 2,845 \rightarrow$ in Resonanz $E = 0,284$

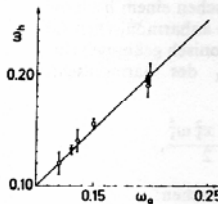


Fig. 5. Die Halbwertsbreite der „Resonanzkurve“ ω_h als Funktion von ω_a . \circ Keplerpotential: $E_1 = E_2 = 3, M_1 = M_2 = 1, G = 2; U$ und K werden in vier Schritten von $U = 15, K = 0,003436$ auf $U = 200, K = 0,02579$ erhöht; \square x^4 -Potential: $E_1 = 5, E_2 = 20, M_1 = M_2 = 5, A = 100, B = 0, K = 0,05$; ∇ Doppelmuldenpotential: $E_1 = 1, E_2 = 12, M_1 = M_2 = 1,8, A = 25, B = 1,4, K = 0,005$

stellung mit Potenzgesetzen könnte Ausgangspunkt dafür sein, die Formeln (1), (2) eventuell mit Störungsrechnung [5] analytisch herzuleiten.

Wir danken H. Haken, W. Kroy, O. Wohofsky, P. Deisz und Ch. Berding für die kontinuierliche Unterstützung und der Firma MBB für das wohlwollende Interesse.

Eingegangen am 5. Mai 1987

1. Klotter, K.: Technische Schwingungslehre, Bd. 1, Teil B, S. 527. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
2. Malraison, B., et al.: *J. Physique* 44, L897 (1983); Lauterborn, W., Cramer, E.: *Phys. Rev. Lett.* 47, 1445 (1981); Parlitz, U., Lauterborn, W.: *Phys. Lett.* 107 A, 351 (1985); Klinker, T., Meyer-Ilse, W., Lauterborn, W.: *ibid.* 101 A, 371 (1984); Huberman, B.A., Crutchfield, J.P.: *Phys. Rev. Lett.* 43, 1743 (1979); Crutchfield, J.P., Huberman, B.A.: *Phys. Lett.* 77 A, 407 (1980); Lie, C., Yuan, J.-M.: *J. Chem. Phys.* 84, 5486 (1986)
3. Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A.: *Regular and Stochastic Motion*, chapt. 4. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1982; Schuster, H.: *Deterministic Chaos*, chapt. 6. Weinheim: Physik-Verlag 1984; Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik: Mechanik*, S. 203. Berlin: Adademie-Verlag 1979
4. Die numerischen Integrationen wurden mit dem Programm DVERK der IMSL Programmbibliothek (IMSL, 7500 Bellaire Boulevard, Houston, Texas, USA), einem Runge-Kutta-Verfahren 5. Ordnung, durchgeführt.
5. Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A.: *Regular and Stochastic Motion*, chapt. 2. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1982