

QUASI-NUMERISCHES NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR UMWANDLUNG VON GEWÖHNLICHEN  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DIFFERENZENGLEICHUNGEN

W.Eberl, A.Hübler\*, E.Lüscher, Physik-Dept.  
Technische Universität München, D-8046 Garching  
M.Maurer, MAN Technologie GmbH, EDP D-8000 München

**Abstract:** Gewöhnliche Differentialgleichungen vom Typ  $dx/dt = f(x,t)$ , die bisher nur numerisch gelöst werden konnten, werden jetzt durch ein analytisches Approximationsverfahren in Differenzengleichungen übergeführt.

1. Einleitung

Nichtlineare Differentialgleichungen (DGLn) können in der Regel nicht exakt analytisch gelöst werden (/1/,/2/). Andererseits kann das zeitliche Verhalten oft durch einfache Differenzengleichungen (DiGLn) beschrieben werden (/3/,/4/,/5/).

Ein gutes Beispiel dazu ist das System eines unkonventionell betriebenen Wobblers, der mit numerischen Verfahren studiert wurde. Die DGL hierzu lautet:  $d^2x/dt^2 - 0.2(16-x^2-w^2x^2) dx/dt + w^2x = 0$ ;  $w=2+w_1 \sin(2t)$  (1a,1b).

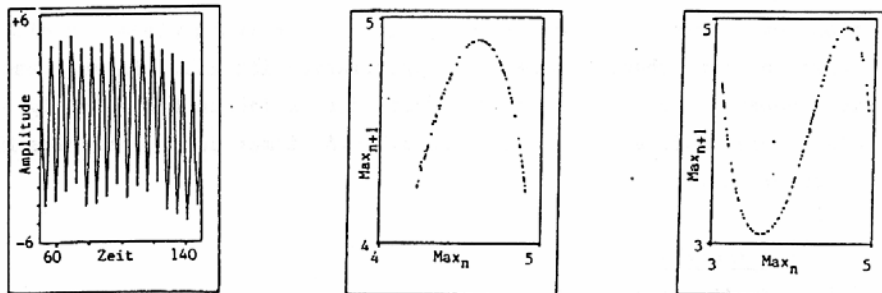


Abb. 1: links: Schwingung des Wobblers (1a,1b) für  $w_1=1.55$   
mitte: Next-Maxima-Abbildung des Wobblers für  $w_1=1.55$   
rechts: Next-Maxima-Abbildung des Wobblers für  $w_1=1.54$

Obwohl hier die Schwingungsmaxima chaotisch aufeinanderfolgen, ergibt sich eine sehr einfache, gut durch eine Parabel zu approximierende Next-Maxima-Abbildung.

Der Schritt von der DGL zur DiGL konnte bisher nur für einen einzigen Parametersatz numerisch ausgeführt werden. Jetzt ist es erstmals gelungen, diesen Schritt analytisch durchzuführen.

Zuerst wollen wir die Probleme dieser Umwandlung allgemein diskutieren, um nachher einige Beispiele für die Anwendung des Verfahrens zu zeigen.

## 2. Analytische Integration durch Bestapproximation

Gegeben sei die explizite DGL:  $dx/dt = F(x,t)$  (2)

Unser Ziel ist, die Funktion  $I: x(t) \rightarrow x(t+T)$  oder  $x(t+T) = I(x(t))$  zu erhalten. Dabei soll  $T$  relativ gross sein, z.B. die Periode einer Schwingung. Es lassen sich dazu beliebige numerische Verfahren einsetzen, z.B. Runge-Kutta-Verfahren. Der Einfachheit halber wollen wir hier die Lösung mit einem einstufigen Differenzenverfahren (vgl. z.B. /6/, Seite 200f.) erläutern. Mit  $h=T/n$  läßt sich die DGL (2) umschreiben in:

$$x(t+h) = x(t) + h * F(x(t),t) \quad (3) \quad \text{mit } x(t=0) = x_0 \quad (4)$$

Dieses Iteration  $n$  mal wiederholt liefert  $x(t+T)$ . Will man dieses Verfahren analytisch durchführen, so stellt man fest, daß der Grad der Polynome und die Anzahl der Terme exponentiell mit der Anzahl der Zeitschritte zunehmen, wenn die Funktion  $F$  nicht linear in  $x$  ist. In der Numerik hat man eigentlich dieses Problem auch, weil sich dort die Anzahl Ziffern in gleicher Weise erhöht.

Durch Rundung der Ergebnisse entstehen Unschärfebereiche. Durch diese Bereiche kann man ein aus Tschebysheff-Polynomen zusammengesetzte Approximationsfunktion legen. Mit dem so erhaltenen, kleineren Polynom wieder in die Iterationsfunktion einzugehen. Diese Bestapproximation ist z.B. in /6/ beschrieben. Es ist dabei zu beachten, daß die Werte der Variablen betragsmäßig nicht größer als 1 werden dürfen. Das ist aber o.B.d.A. immer durch geeignete Maßeinheiten zu erreichen.

## 3. Beispiele

### 3.1 Eindimensionaler Fall

Gegeben sei die DGL:  $a*dx/dt + 4*b*x^3 + 2*c*x = 0$  (7)

In den folgenden Bildern ist für  $a=1$ ,  $b=0.25$  und  $c=0.5$  der Wert von  $x$  zur Zeit

$t=1$  über dem Anfangswert  $x_0$  aufgetragen. Die durch 16 analytische Iterationen erhaltene Lösungsfunktion ist jeweils in der durchgezogenen Kurve dargestellt; die gestrichelte Kurve wurde durch ein numerisches Einschrittverfahren mit der gleichen Schrittweite an 50 Stützstellen in diesem Intervall erhalten. Deutlich zu sehen sind die Abweichungen in Abb. 2a, die vom einfachen Weglassen der höheren Potenzen herrühren und die gute Übereinstimmung durch die Tschebyscheff-Approximation (Abb. 2b).

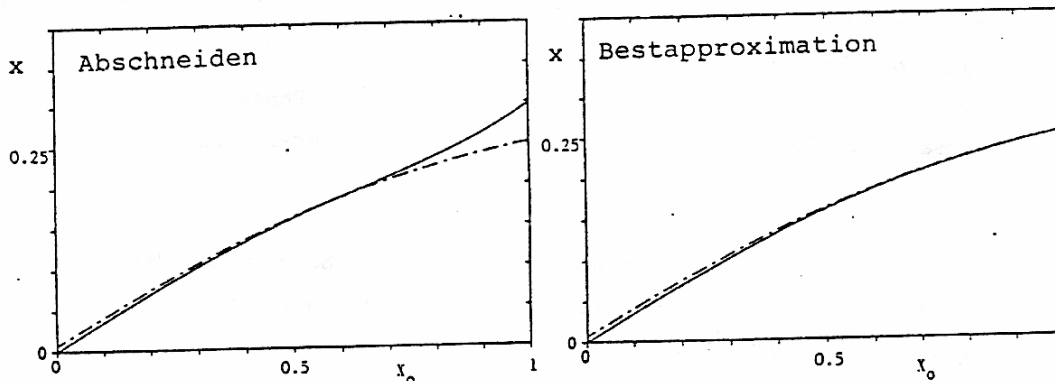


Abb. 2a,2b: Iterationsfunktionen für DGL (7) nach 16 Schritten

### 3.2 Mehrdimensionaler Fall

Als Beispiel für eine zweidimensionale DGL zeigen wir hier die Ergebnisse für einen speziellen nichtlinearen Schwinger, den Van-der-Pol-Oszillator. Die DGL dafür lautet:  $d^2x/dt^2 + g(a-x^2)dx/dt + w^2x = 0$  (8)  
 Abb. 3 zeigt dazu die Phasenraumdarstellung für  $w=6.28$ ,  $g=1$  und  $a=0.5$ . Durch 16-fache analytische Iteration mit der Schrittweite  $h=1/128$  gewinnt man folgende Iterationsfunktion, die den Oszillatorzustand zur Zeit  $T=T_0+1/8$  in Abhängigkeit des Zustandes bei  $T=T_0$  beschreibt.

$$x_1(T=T_0+1/8) = 0.0074594 w^2 x_0 + 0.0075925 x_0^2 v_0 + 0.1287295 v_0 \quad (9a)$$

$$x_2(T=T_0+1/8) = 0.128729 w^2 x_0 + 0.1323756 x_0^2 v_0 + 1.064356 v_0 \quad (9b)$$

Diese Formeln wurden an einer VAX 11/750 mit dem Programmsystem 'REDUCE' in einer Stunde errechnet. Vom Startpunkt ( $x_0=0.1$ ,  $v_0=0$ ) aus wurde mit der analytisch erhaltenen Iterationsfunktion 100 mal iteriert, und zwar für einen Zeitschritt von  $1/8$ . Die erhaltenen Punkte wurden mit Geradenstücken verbunden, wodurch sich die durchgezogene Linie ergab. Die gestrichelte Kurve wurde

zum Vergleich durch numerische Integration mit der Schrittweite  $1/128$  erzielt. Die eigentliche Schrittweite ist damit bei beiden Verfahren gleich, weil hier eine Iteration mit der erhaltenen Iterationsfunktion bereits 16 Iterationen enthält. Außer dem Vorteil, die gleiche Genauigkeit wie die Numerik durch 16 mal weniger häufige Rechnung zu erhalten, enthält die Iterationsfunktion die drei Variablen  $x_0$ ,  $v_0$  und  $w$ , so daß man für einen neuen Parametersatz das Verfahren nicht neu starten muß.

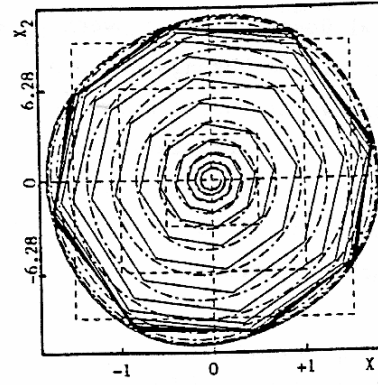


Abb.3: Phasenraumdiagramm des Van-der-Pol-Oszillators,  $w=6.28$

Wir bedanken bei den Herren Doctores Wohofsky, Satzger und Hayd sowie bei den Firmen MBB und MAN. Die numerischen Simulationen für den Wobbler wurden von R. Stangl durchgeführt.

- /1/ G. Eilenberger: Nichtlineare Dynamik kondensierter Materie, Kernforschungsanlage Jülich, Jülich 1983
- /2/ Landau-Lifshitz: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1, Mechanik, 6.Auflage, Berlin 1969, S. 203
- /3/ P. Collet, J.-P.-Eckmann: Iterational maps on the interval as dynamical systems, New York, 1980
- /4/ Heinz-G. Schuster: Deterministic Chaos, Weinheim 1984, Seite 93 f.
- /5/ C. Wachinger, A. Hübler, G.Reiser, E. Lüscher, H.P.A, Vol. 59, 132 (1986)
- /6/ H. Selder: Einführung in die numerische Mathematik für Ingenieure, 2. Auflage, München 1979, Seite 267 ff.

\* Diese Arbeit ist Teil der Promotionsarbeit von A. Hübler.