

Instabilitäten und Strukturierung von Flüssigkeitsoberflächen im nichtlinearen Potential

E. LÜSCHER und A. HÜBLER, Physik-Department der Technischen Universität München,
D-8046 Garching, BRD

Zunächst soll versucht werden, für die Strukturierung flüssiger Grenzflächen eine Modellvorstellung zu entwickeln. Man betrachtet zu diesem Zweck ein mechanisches Modell, welches aus drei Teilsystemen besteht und sich durch folgende Lagrange-Funktion beschreiben läßt:

$$L = \frac{1}{2}m \sum_1^3 \dot{\epsilon}_i^2 + \frac{1}{2}c' \sum_1^3 \epsilon_i^2 - \frac{1}{2}c[\epsilon_1^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_2)^2 + \epsilon_3^2] \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \text{Auslenkung,} & c' &= \text{Destabilisationskonstante} \\ c &= \text{Federkonstante,} & m &= \text{Masse eines Teilsystems} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Rayleigh Dissipationsfunktion soll lauten:

$$F = \frac{1}{2}\eta(\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_3^2) \quad \text{mit der Reibungskonstante } \eta. \quad (2)$$

Aus den Lagrange-Gleichungen ergeben sich folgende Eigenfunktionen:

$$E_1 = 1 \cdot \epsilon_1 + 0 \cdot \epsilon_2 - 1 \cdot \epsilon_3 \quad \text{mit den Eigenwerten}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2}\eta \pm \frac{1}{2}[\eta^2 + 4(c' - c)]^{1/2}$$

$$E_2 = 1 \cdot \epsilon_1 - 2 \cdot \epsilon_2 + 1 \cdot \epsilon_3 \quad \text{mit den Eigenwerten}$$

$$\lambda_{3/4} = -\frac{1}{6}\eta \pm \frac{1}{2}[(\eta/3)^2 + 4(c' - \frac{7}{3}c)]^{1/2}$$

Erhöht man die Destabilisationskonstante c' langsam, so lassen sich vier Typen von Bewegungsabläufen klassifizieren:

- (a) Ist $c' < c$, sind beide Moden gedämpft;
- (b) Ist $c < c' < \frac{7}{3}c$, so wächst die langwellige Eigenmode E_1 exponentiell an, d.h. das System strukturiert sich. Die kurzwellige Mode E_2 , benachteiligt durch die größeren Federspannungen, ist noch gedämpft.
- (c) Für $c' > \frac{7}{3}c$ wächst auch die zweite Eigenmode.
- (d) Für $c' > a$ dominieren Reibungsverluste, und die kurzwellige Eigenmode E_2 wächst wesentlich schneller als die langwellige Mode E_1 , $a = 4(c/\eta)^2 + 3c$.

Sind die Stempel eng benachbart, so führt die electrostatische Abstoßung der Stempel untereinander zu einem kleineren oder negativen c -Wert. In diesem Fall wächst die kurzwellige Mode E_2 für alle c' -Werte am schnellsten. Damit ergibt sich:

- Die kurzwellige Struktur, begünstigt durch die Reibung, baut sich auf, falls die Destabilisationskonstante c' wesentlich schneller auf einen großen Wert bezüglich der Federkonstante c erhöht wird, als das System folgen kann, oder bei großer Haftreibung oder bei negativer Federkonstante c .
- die langwellige Struktur baut sich auf, wenn c' nur geringfügig größer als die Federkonstante c ist.

Ähnliche Aussagen lassen sich analog aus einem Modell mit beliebig vielen Kondensatoren folgern. Im Folgenden sei an Hand einiger Experimente das Auftreten einer derartigen Strukturierung demonstriert.

Man betrachtet einen horizontal aufgestellten Plattenkondensator ($\phi = 20$ cm, Plattenabstand 1 cm), der teilweise mit Vak.-Pumpenöl (runder Öltropfen, Höhe 1 mm, Durchmesser 30 mm) und teilweise mit Luft gefüllt ist und unterteilt ihn in nummerierte Zellen. Die Zellen können je nach Leitfähigkeit mehr oder minder schnell mit den Nachbarzellen Öl, Ladungen und Energie austauschen. Im Inneren jeder Zelle soll fast Gleichgewicht herrschen. Betrachtet man nur die Höhe des Ölstands als Freiheitsgrad der einzelnen Zellen, so besteht eine Strukturierung des Makrosystems darin, daß die Höhe jeder Zelle unterschiedlich ist. Der hydrostatische Druck sowie die Oberflächenspannung führen zu einer Kraft analog zu der der Federkonstante c im Modell, die den homogenen Zustand begünstigt. Die nichtlineare Kraft der Elektronen im Potential der oberen Kondensatorplatte und die electrostatische Abstoßung der Elektronen untereinander, wirkt dieser Kraft entgegen. Die Modenanalyse [1] eines mechanischen Analogons aus kleinen Kondensatorplatten ergibt (3) $c' = -(\partial^2 V / \partial \epsilon_i^2)$

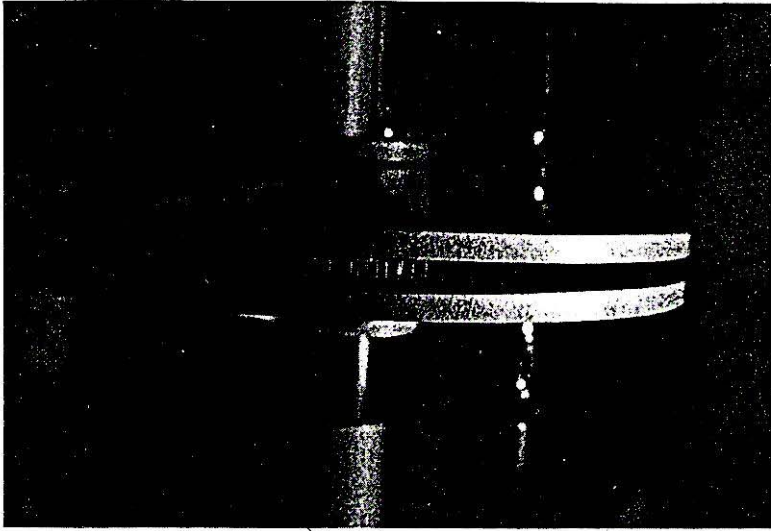


Abbildung 1
Ein periodisches Muster aus Ölsäulen (Abstand 6 mm).

(V = elektrostatische Energie des Feldes zwischen den Platten). Begrenzt man die Menge des Öls ($\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$ beim Modell), so baut sich oberhalb einer kritischen Spannung (ca. 15 kV) ein periodisches Säulenmuster auf. In der Mitte der Säulen fließt das Öl nach oben, am Rand nach unten. Ersetzt man das Öl, bzw. die Luft, durch andere Medien, so ergeben sich ähnliche Strukturen (z.B. Ketten aus Wasserperlen im Öl). Benützt man als Medien Wasser und feuchte Luft und prägt dem System anstatt der konstanten Spannung einen konstanten Strom auf, so erhält man ein System, das sich unter dem Einfluß eines Nichtgleichgewichts strukturiert. Setzt man die Ortsabhängigkeit des elektrischen Widerstands als nichtlinear an (Überschlag), so ergibt sich für ein Modell aus kleinen Plattenkondensatoren ein ϵ -abhängiges elektrostatisches Potential und mit (3) c' . Oberhalb einer kritischen Spannung führt eine kleine Deformation der Wasseroberfläche zum Überschlag und damit zu einer drastischen Reduzierung des Widerstands. Ausgelöst durch eine kleine Störung baut sich eine stehende Wasserwelle auf, an deren Scheiteln bei fast jeder Oszillation ein Überschlag erfolgt.

Die elektrostatische Kraft kann auch durch eine hydrodynamische Kraft ersetzt werden. Erzeugt man in einem horizontalen Rohr (ϕ 15 mm), das zu 30% mit Öl gefüllt ist eine stehende Schallwelle, so wirkt auf die Flüssigkeitsoberfläche eine Kraft nach oben, die mit der Schallschnelle wächst. Eine Deformation der Flüssigkeitsoberfläche am Schwingungsbauch bewirkt eine Verringerung der Luftraumquerschnittsfläche und damit eine Erhöhung der Schallschnelle. Dies bedeutet, daß auf eine Deformation, ähnlich wie bei einem elektrostatischen Potential, eine Kraft wirkt, die hyperbolisch wächst [2]. Während in den ersten vier Experimenten Versuche vorgestellt wurden, bei denen die zu erwartende Struktur groß ist, d.h. etwa die Skala der äußeren Geometrie (Abstand der Platten,

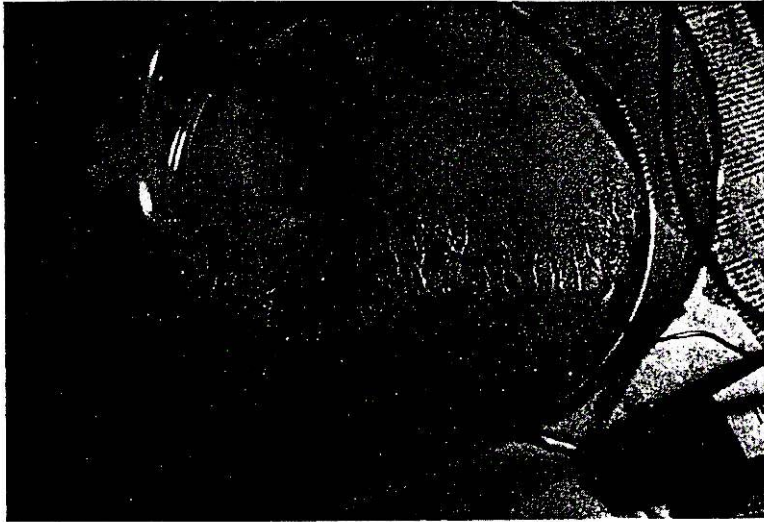


Abbildung 2
'Bäumchenartige' Strukturen aus Öl.

Rohrdurchmesser) besitzt, wird im folgenden ein Experiment mit wesentlich kleinerer Skala vorgestellt. Auf einer leicht geneigten Glasplatte (Neigungswinkel 1°) werden zwei längliche Elektroden ($20\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$) angebracht. An der tiefer gelegenen Elektrode wird Öl auf die Glasplatte gegossen, welches die Elektrode benetzt. Legt man eine Spannung (10 kV) an die Elektroden an, so strukturiert sich die Kante des Öltropfens mit einer Skala von ca. 1 mm (Abb. 2). Die Federkonstante c ist nicht wie bei den ersten Experimenten durch den hydrostatischen Druck verstärkt, sondern durch die starke Aufladung der Kante stark verringert. Ferner ist die Haftreibung des Öls groß, was dazu führt, daß sich das System erst bei sehr großer Destabilisationskonstante c' strukturiert.

REFERENZEN

- [1] H. HAKEN, *Synergetics* (Springer, Berlin 1978).
- [2] A. HÜBLER, G. SCHUBERT und G. MAYER-KRESS, in *Chaos and Order in Nature*, ed.: H. Haken (Springer, Berlin 1981).