

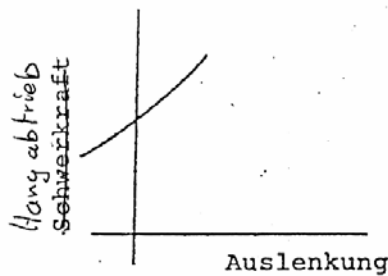
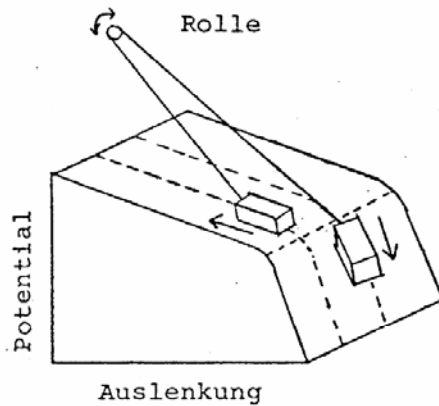
Strukturbildung im Kundt'schen Rohr

A. Hübler, E. Lüscher

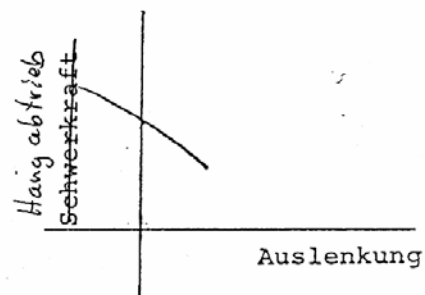
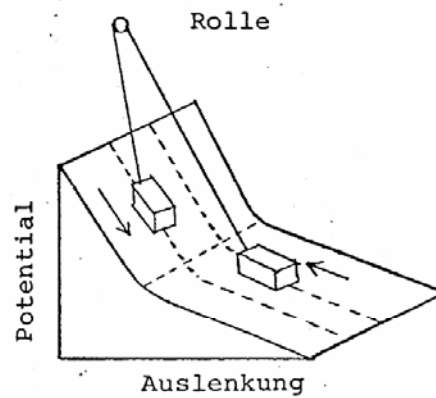
Physik-Department E13, Technische Universität München, 8046 Garching

Warum bilden sich in der Wüste Dünen? Warum bilden sich Schlaglöcher? Unter welchen Bedingungen wandelt sich eine glatte Oberfläche in eine strukturierte um? Dieser schon historischen Fragestellung begegnet man in allen Bereichen der Physik /1/. Im folgenden wird ein mechanisches Modell vorgestellt, mit dem auf einfache Weise Übergänge vom strukturlosen zum strukturierten Zustand demonstriert werden kann.

1. Ein mechanisches Modell zur Strukturbildung



Die Kraft wächst mit der Auslenkung.



Die Kraft fällt mit der Auslenkung.

Zwei Fahrzeuge können sich auf einer schiefen, geknickten Ebene auf Gleisen auf und ab bewegen. Die beiden Fahrzeuge seien mit einer Schnur so gekoppelt, dass ihre Auslenkungen entgegengesetzt gleich gross sind. Die beiden Fahrzeuge sollen sich zunächst an der Knickstelle befinden. Dies ist eine Gleichgewichtslage. Um festzustellen, ob diese Gleichgewichtslage stabil ist, lenkt man das System aus der Gleichgewichtslage aus. Ist die Fahrbahn konvex gekrümmt, so wächst ~~die Schwerkraft~~ ^{der Hangabtrieb} mit der Auslenkung an und das untere Fahrzeug befindet sich auf dem steileren Stück. Die beiden Fahrzeuge fahren auseinander. Ist die Fahrbahn dagegen konkav gekrümmt, so befindet sich das obere Fahrzeug auf dem steileren Stück und das System kehrt in die Gleichgewichtslage zurück. Allgemein lässt sich zeigen:

Die Fahrzeuge fahren auseinander, falls ^{schwer} die Kraft mit der Auslenkung wächst. *der Hangabtrieb*

Führt man folgende Definition ein

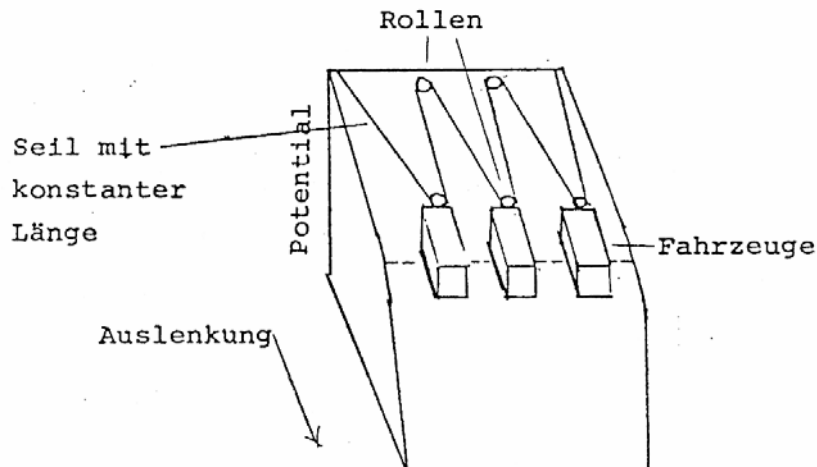
Homogener Zustand = die Fahrzeuge besitzen gleiche Auslenkung

Strukturierter Zustand = die Fahrzeuge besitzen unterschiedliche Auslenkung

so lässt sich obiger Satz allgemeiner formulieren:

Der strukturierte Zustand wächst, wenn die Kraft ^(hier Hangabtrieb) mit der Auslenkung zunimmt.

Mit Hilfe eines Modells aus mehreren Fahrzeugen soll untersucht werden, welche Struktur sich abzeichnet. Mit drei Fahrzeugen, die über eine Schnur konstanter Länge miteinander gekoppelt sind, gibt es z.B. die Möglichkeit, dass die beiden äusseren Fahrzeuge nach unten fahren



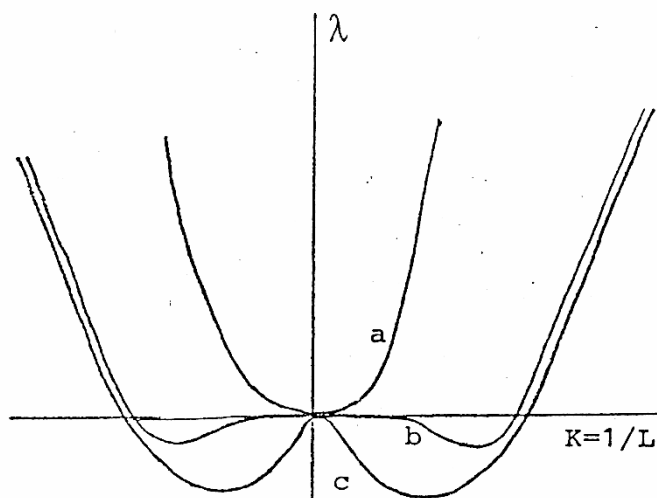
und das mittlere nach oben oder dass das linke nach unten, das rechte nach oben fährt, während das mittlere in Ruhe bleibt. Die Lösung der Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der nichtlinearen Kraft auf die Fahrzeuge, der Trägheit der Fahrzeuge und von Reibungsverlusten in den Umlenkrollen des Seils ergibt, dass jene Struktur am schnellsten wächst, bei der je ein benachbartes Fahrzeugpaar in entgegengesetzter Richtung fährt. Dies ist jener Zustand, bei dem sich das Seil über möglichst wenige Rollen bewegt und damit die Reibungsverluste klein sind. Koppelt man je zwei benachbarte Fahrzeuge zusätzlich mit einer starken Feder, so wächst jener Zustand am schnellsten, bei dem die Federn am wenigsten gespannt sind. d.h. je zwei benachbarte Fahrzeuge die gleiche Amplitude besitzen. Bei einem Modell aus drei Fahrzeugen fährt bei grosser Reibung z.B. das linke und das rechte nach unten und das mittlere nach oben, während bei grosser Kopplungskraft das linke nach unten, das rechte nach oben fährt und das mittlere in Ruhe bleibt.

Die konkurrierenden Einflüsse von Reibung und Kopplungskraft lassen sich besonders gut mit einem Modell aus sehr vielen Fahrzeugen demonstrieren. Folgende Funktionen (Moden) lösen die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen A der Fahrzeuge:

$$A(x,t) = A_0 \sin \frac{x}{L} e^{-\lambda t}$$

x = Position des Fahrzeugs, L = Längenskala der Struktur, λ = Wachstumsrate, t = Zeit

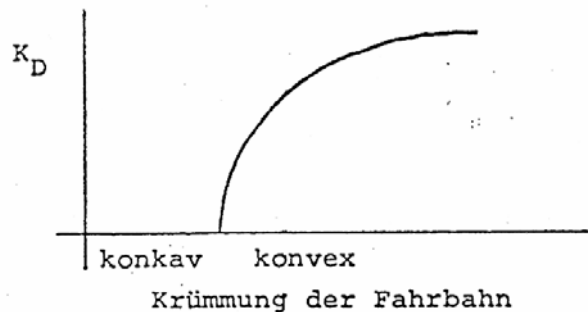
wobei sich folgender Zusammenhang zwischen der Längenskala der Struktur und der Wachstumsrate ergibt.



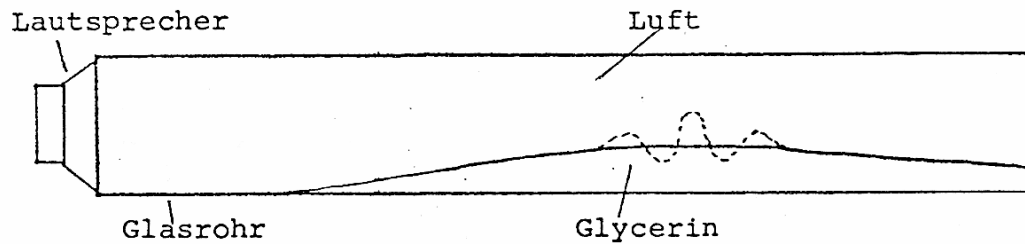
- a) Fahrbahn konkav
- b) Fahrbahn konvex
große Reibung
- c) Fahrbahn konvex
große Federkraft

Alle Moden mit positivem λ zerfallen. Alle Moden mit negativem λ wachsen, jene mit dem kleinsten λ am schnellsten. In einem realen System wird man im wesentlichen nur jene Skala $L_0 = \frac{1}{\kappa_D}$ vorfinden, für die $\lambda(\kappa_D)$ minimal ist. Ist $\lambda(\kappa_D)$ negativ, so wächst diese (dominierende) Mode am schnellsten, ist $\lambda(\kappa_D)$ positiv, so zerfällt die dominierende Mode am langsamsten.

Ist die Fahrbahn konkav gekrümmt, so ist $\kappa_D = 0$ und $\lambda(\kappa_D) = 0$. Hier ist nur der homogene Zustand mit der Längenskala $L_D = \frac{1}{\kappa_D} = \infty$ zu beobachten. Ist die Fahrbahn konvex gekrümmt, so ist $\lambda(\kappa_D) < 0$ und bei grosser Reibung besitzt die dominante Mode eine kleine Längenskala, während sie bei grosser Kopplungskraft eine grosse Längenskala besitzt. Beim Übergang von einer konkav gekrümmten Fahrbahn zu einer konvex gekrümmten Fahrbahn findet ein Phasenübergang statt.

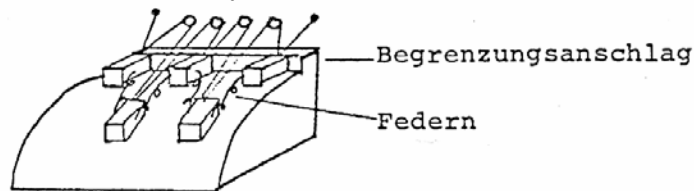


Auch bei konvex gekrümmter Fahrbahn ist der strukturlose Zustand noch möglich; er ist metastabil. Nur wenn man von aussen her kleine Auslenkungen dem System aufprägt (Rauschen), entwickeln sich diese (wie bereits oben diskutiert) weiter. Werden durch ein weisses Rauschen alle Moden gleich stark angeregt, so entwickelt sich die dominante Mode extrem stark. Wird aber z.B. die dominante Mode durch das Rauschen nicht angeregt, so bleibt deren Amplitude null. Wird ein derart gefärbtes Rauschen als Trigger benutzt, so kann man völlig andere Strukturen erhalten, als man eigentlich erwartet. Eine andere wesentliche Schwierigkeit ist, dass obige Analyse nur für kleine Auslenkungen gilt, d.h. bei der mathematischen Analyse nur die nicht verschwindenden Terme niedrigster Ordnung berücksichtigt wurden. Terme höherer Ordnung können dazu führen, dass das exponentielle Wachstum gebremst, die Skala der dominanten Mode verschoben und nicht dominante Moden völlig unterdrückt werden etc. Einige dieser Punkte werden im nächsten Kapitel angesprochen, doch zunächst zu einem Anwendungsbeispiel:



In einer horizontal aufgestellten akustischen Resonanzröhre, die zu $1/10$ mit Glycerin gefüllt ist, wird eine stehende Schallwelle angeregt (300 Hz). In der Umgebung des Schwingungsbauches erzeugt die Schallschnelle einen statischen Unterdruck. Auf die Flüssigkeitsoberfläche wirkt eine Kraft nach oben. Lenkt man die Flüssigkeitsoberfläche ein wenig nach oben aus, so wächst diese Kraft mit der Auslenkung, da sich der Rohrquerschnitt verringert und sich die Schallschnelle an dieser Stelle noch erhöht. Teilt man die Flüssigkeitsoberfläche längs des Rohres in Gedanken in viele kleine Stücke, so entsprechen diese den Fahrzeugen im Modell. Der Oberflächenspannung entsprechen die Federn, dem Fließen des Öls die Bewegung des Seils, der Viskosität die Reibung in den Seilrollen. Der nichtlinearen Kraft im Fahrzeugmodell entspricht eine nichtlineare Kraft, die sich aus hydrostatischem Druck und dem Druck, erzeugt durch die Schallwelle, zusammensetzt. Übersteigt die Schallamplitude (Schallschnelle) eine kritische Amplitude, so wächst die Kraft mit der Auslenkung der Flüssigkeitsoberfläche an. Man erwartet also, dass sich die Flüssigkeitsoberfläche oberhalb einer kritischen Schallamplitude wellenförmig verformt, was auch beobachtet werden konnte. Das Anwachsen dieser Struktur wird allerdings jäh unterbrochen, wenn die Wellentäler die Rohrwand erreichen. Man beobachtet, dass plötzlich jeder zweite Wellenberg verschwindet und von den benachbarten Wellenbergen verschluckt wird. Diese Erscheinung wiederholt sich, bis schliesslich meist nur ein einziger grosser Berg an der Stelle der grössten Schallschnelle übrig bleibt. Dieses Entwicklungsmuster, gekennzeichnet durch Konkurrenz und Selektion, kann durch Terme höherer Ordnung beschrieben werden.

2. Konkurrenz und Selektion



Der Einfluss von Termen höherer Ordnung wird sehr eindrucksvoll durch Hinzufügen eines Begrenzungsanschlags am Fahrzeugmodell demonstriert. Erreichen jene Fahrzeuge, die nach oben fahren, den Anschlag, so kommt der Aufbau der Struktur zunächst zum Stillstand. Eine weitere Entwicklung ist allerdings möglich, indem z.B. Fahrzeug 2 nach unten fährt, Fahrzeug 4 umkehrt und nach oben fährt, während die Fahrzeuge 1, 2 und 5 keine weitere Bewegung mehr durchführen. Lässt man die zuletzt genannten Fahrzeuge ausser acht, steht man jetzt im Grunde vor demselben Problem wie zu Beginn der Strukturierung. Die Fahrzeuge 2, 4 (6...) stehen auf gleicher Höhe, irgendeines fährt nach unten, ein beliebig anderes wird nach oben gezogen. Die Summe aller Auslenkungen bleibt konstant, dabei kann sich allerdings einiges geändert haben:

1. Die Fahrbahn ist möglicherweise stärker gekrümmt.
2. Es gibt keine direkte Kopplung mehr zwischen den neuen Nachbarn (2,4,6..).
3. Die neuen Reibungsverluste sind grösser, da das Seil über mehr Rollen gleiten muss, um zum neuen, nächsten Nachbarn zu gelangen.
4. Die Federn wirken stabilisierend für den neuen, homogenen Zustand.

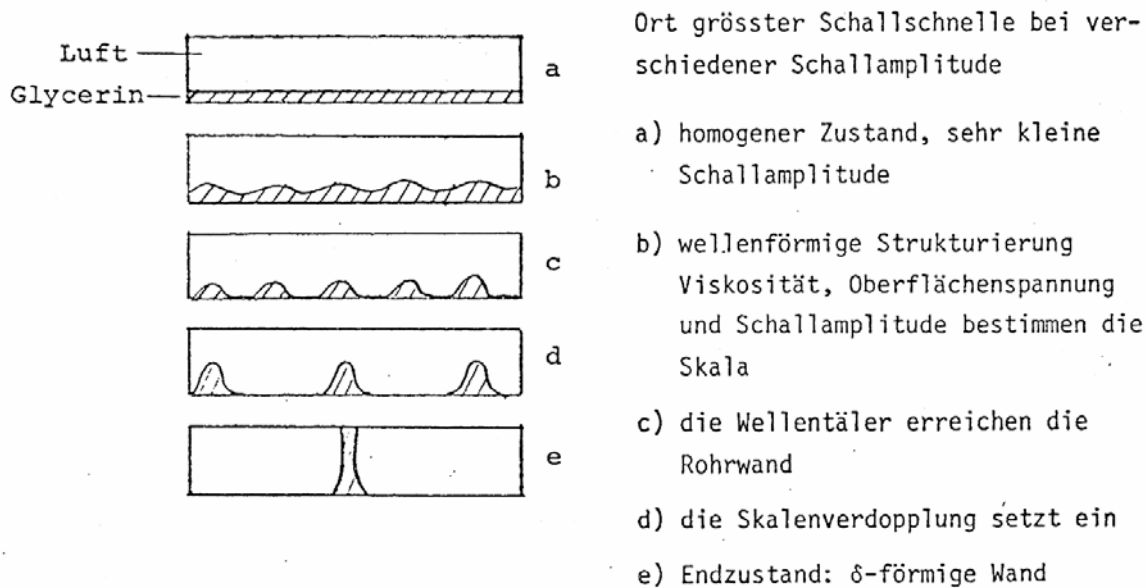
Ist die Fahrbahn stark konvex gekrümmt, so strukturiert sich das System erneut; da keine Kopplungskräfte mehr zwischen den neuen Nachbarn existieren, ~~jedoch grosse~~ ^{bedingen} Reibungsverluste die kurzmöglichste Struktur.

~~bedingen~~. Dies bedeutet, dass z.B. Fahrzeug 2 nach unten und Fahrzeug 4 nach oben fährt, bzw. in einem Modell aus vielen Fahrzeugen, in dem ursprünglich lange Wellenberge entstanden, verschwindet nun jeder zweite Wellenberg. Dieser Prozess der Skalenverdopplung kann sich oft wiederholen. Welcher von zwei benachbarten gleichberechtigten und konkurrierenden Wellenbergen verschwindet und welcher weiterwächst, entscheidet der zufällige Einfluss des Rauschens.* Die Situation ändert sich, wenn ein Selektionsvorteil existiert, wenn z.B. die Fahrbahn in der Mitte etwas steiler ist als am Rand. Am Ende der Entwicklung bleibt dann nur ein einziger grosser Wellenberg in der Mitte übrig. Oberträgt man dieses Modell

* Am Ende der Entwicklung bleibt ein einziger

wie oben auf die Resonanzröhre, wobei dem Erreichen des Anschlag beim mechanischen Modell der Zustand entspricht, bei dem die Wellentäler die Rohrwand erreichen, so kann man die Entwicklung von der glatten Flüssigkeitsoberfläche zur wellenförmigen Struktur und schliesslich die Skalenverdopplung bis zur δ -förmigen Wand gut verstehen.

Obwohl einige physikalische Details beim Übergang vom mechanischen Modell zur Resonanzröhre nicht berücksichtigt wurden (z.B. die Änderung des Einflusses der Viskosität mit dem Flüssigkeitsstand), kann die Strukturbildung qualitativ richtig beschrieben werden. Dies mechanische Modell ist ausbaufähig, so dass auch weitere Details berücksichtigt werden können (z.B. nichtlineare Rollreibung, Trägheit des Seils etc.). Ersetzt man die Schallschnelle durch einen konstanten Luftstrom, gelangt man zu Wasserwellen und Dünen. Ersetzt man die Kraft, die durch die Schallwelle erzeugt wurde, durch elektrostatische Kräfte oder nichtlineare Fliehkräfte, so erhält man weitere Systeme mit nahezu identischen Eigenschaften. Ersetzt man die Ortsamplituden im mechanischen Modell durch Geschwindigkeitsamplituden, gelangt man zu den wohlbekanntenen Wirbelstrukturen der Taylor- und Benardexperimente.



Wir danken der Firma Messerschmitt-Bölkow-Blohm, W. Kroy, O. Wohofsky und D. Brunner für die Unterstützung.